6.8 由奇異矩陣組成的羣

工作紙

題目

STEP III 1996，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/96-s3-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　在第 (i) 部分，單位矩陣 $\mathbf{I}$ 並不是 $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ 這種形式。那麼 S 的單位元會是甚麼？

階段 1　封閉性（closure）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　以 $\mathbf{M}_a$ 表示四個元素全為 a 的矩陣。$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b$ 等於甚麼？

階段 2 羣公理（group axioms）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 單位矩陣（identity matrix）$\mathbf{I}$ 並不在 S 之中。那麼 S 的單位元（identity）可以是甚麼？由 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a$ 解出 e。

停一停，試一試 至於逆元（inverse），由 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = \mathbf{M}_e$ 解出 b。

階段 3　奇異性（singularity）會蔓延

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試**　假設 $\mathbf{A} \in G$ 是奇異矩陣，而 $\mathbf{B}$ 是 G 的任意一個元素。利用 $\mathbf{A}$ 在羣中的逆元，把它寫成 $\mathbf{B} = \mathbf{AC}$，其中 $\mathbf{C}$ 屬於 G。然後取行列式（determinant）。

階段 4　一個 3×3 的例子

涵蓋：第 (ii) 部分

> **想一想**　你能否把第 (i) 部分推廣到 3×3 矩陣？又或者找一個更簡單的例子：用一個忽略三個坐標中其中兩個的矩陣？

背後的數學

冪等元與隱藏的可逆性

任何矩陣羣的單位元 $\mathbf{E}$ 都滿足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$：它是冪等（*idempotent*）的。從幾何上看，冪等矩陣就是一個投影（*projection*）：它把每個向量映射到某個子空間（subspace）上，而原

本已在該子空間內的向量則保持不變。在第 (i) 部分，$\mathbf{E}$ 把平面投影到直線 $y = x$ 上，而每個矩陣 $\mathbf{M}_a$ 都是先投影到這條直線上，然後沿着它以因子 $2a$ 拉伸（圖 6.8.1）。在這條直線上，這個羣的作用是可逆的拉伸；它只是無視了與直線垂直的方向。所以 S 其實就是非零實數的乘法羣（透過 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$），只不過它棲身於平面內的一條直線上。這個結論普遍成立：每個由矩陣組成的羣，經過換基（change of basis）之後，都是一個由可逆矩陣組成的羣，作用於其單位元的像上，其餘位置則以零填充。

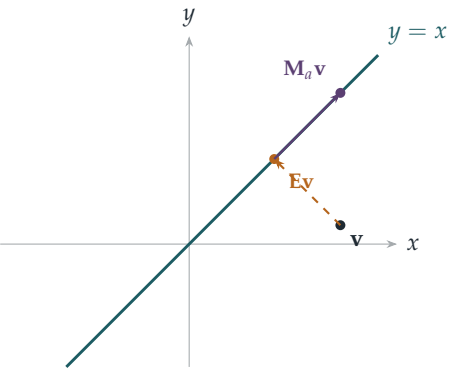

圖 6.8.1　第 (i) 部分的矩陣所起的作用。單位元 $\mathbf{E}$ 把每個向量 $\mathbf{v}$ 投影到直線 $y = x$ 上（琥珀色虛線）。每個 $\mathbf{M}_a$ 都先作同樣的投影，然後沿着直線以因子 $2a$ 拉伸（紫紅色；圖中 $2a = \frac{16}{9}$）。在這條直線本身之上，這個羣的作用就是普通的可逆縮放。

抽象與具體

人們最早研究的羣都是具體的：置換（permutation）、對稱、可逆矩陣。抽象的定義（一個集合連同一個滿足三條公理的運算）是從這些例子中提煉出來的。本題顯示了抽象觀點的價值：S 與非零實數的乘法羣是同構（*isomorphic*）的，即同一個羣換了一身衣服，儘管一個由奇異矩陣組成，另一個由數組成。辨認出兩個外表不同的結構何時「相同」，是代數最核心的技巧之一，而數學家正是藉同構這個概念把這種「相同」說得精確。

延伸練習

1 **一個同構。**證明映射 $\mathbf{M}_a \mapsto 2a$ 是由 S 到非零實數的一一對應（one-to-one correspondence），並且把矩陣乘法變成數的乘法。

2 **不是羣。**證明所有形如 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 且 $a \neq 0$ 的矩陣所組成的集合在乘法下封閉，但不是一個羣。（提示：試找單位元。有沒有左單位元？有沒有右單位元？）

3 **冪等元。**求所有滿足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$ 的 2×2 實矩陣 $\mathbf{E}$，並從幾何角度描述它們。

4 **所有項相等。**證明所有項都等於 $a \neq 0$ 的 $n \times n$ 矩陣在乘法下構成一個羣，並求它的單位元。

延伸閱讀

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。講述矩陣羣與同構，並附有大量幾何例子。
- **Gilbert Strang, *Introduction to Linear Algebra***（Wellesley-Cambridge）。對投影與冪等矩陣有清晰的講解。
- **Joseph Gallian, *Contemporary Abstract Algebra***（CRC Press）。一本平易近人的入門教材，載有許多不尋常的羣的例子。

完整的引導式解答見第 6.8 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/singular-group.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com