6.7 四元數羣

工作紙

題目

STEP III 1993，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s3-q5

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　把數對 (z_1, z_2) 看成代表一個「數」$z_1 + z_2\mathrm{j}$，其中 j 是一個新符號，滿足 $\mathrm{j}^2 = -1$，並且對任意複數 w 有 $\mathrm{j}w = w^{*}\mathrm{j}$。試用這些法則計算 $(z_1 + z_2\mathrm{j})(w_1 + w_2\mathrm{j})$。得出的是否就是 $\circ$ 的公式？

階段 1 藉矩陣處理結合律（associativity）

涵蓋：結合律

想一想 直接驗證 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ 相當冗長。有沒有更巧妙的方法？

停一停，試一試 把 (z_1, z_2) 與複矩陣 (complex matrix) $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -z_2^* & z_1^* \end{pmatrix}$ 對應起來。兩個這樣的矩陣相乘，積的第一行是甚麼？矩陣乘法符合結合律。

階段 2　不符合交換律（commutativity）

涵蓋：交換律，以及四個乘積

想一想　試計算 $(0,1)\circ(i,0)$ 和 $(i,0)\circ(0,1)$。然後把零代入定義，得出四個特殊乘積。

階段 3 八個元素的羣（group）

涵蓋：集合 S_1

想一想 利用四個特殊乘積，證明 S_1 是封閉（closed）的。單位元（identity）是甚麼？

停一停，試一試 求出每個元素的平方。哪些元素的平方是單位元，哪些是 $(-1,0)$？由此求出每個元素的階（order）和逆元（inverse）。

階段 4　一個子羣（subgroup）

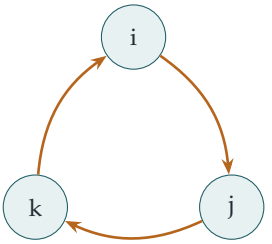
涵蓋：子羣與矩陣

想一想　計算 B 的各次冪，再計算題目所給矩陣的各次冪，然後把兩者逐一對應。

背後的數學

複數之外

實數構成一個一維的數系，在其中可以做加法、乘法和除法；複數則構成一個二維的數系。哈密頓的四元數是四維的，除法依然可行，但乘法不再滿足交換律（圖 6.7.1）。1878 年，弗羅貝尼烏斯（Ferdinand Frobenius）證明了 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{H}$（取自 Hamilton 的首字母）這三者，是實數域上僅有的、乘法滿足結合律的有限維「可除代數」（division algebras）。如果放棄結合律，但保留一個可乘的大小，即 $|xy| = |x|\,|y|$，一如實數、複數和四元數那樣，那就恰好還多一個：八維的八元數（octonions），由 John Graves 和凱萊（Arthur Cayley）在 1840 年代發現。赫維茲（Adolf Hurwitz）於 1898 年證明，這類數系就只有這四個。（若不設關於大小的條件，還有其他更古怪的非結合可除代數，但 1958 年一條由博特（Raoul Bott）、米爾諾（John Milnor）和 Michel Kervaire 得出的深刻定理指出，任何有限維實可除代數的維數必為 1、2、4 或 8。）



順着箭頭：$\mathrm{ij}=\mathrm{k}$，$\mathrm{jk}=\mathrm{i}$，$\mathrm{ki}=\mathrm{j}$

逆着箭頭：$\mathrm{ji}=-\mathrm{k}$，$\mathrm{kj}=-\mathrm{i}$，$\mathrm{ik}=-\mathrm{j}$

以及 $\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=-1$

圖 6.7.1　哈密頓的乘法法則。把 i、j、k 其中兩個順着箭頭方向相乘，得到第三個；逆着箭頭方向相乘，則得到第三個的相反數。$\pm1, \pm\mathrm{i}, \pm\mathrm{j}, \pm\mathrm{k}$ 這八個元素構成本題的四元數羣 Q_8。

三維空間中的旋轉

模（modulus）為 1 的四元數描述三維空間的旋轉：繞單位軸 $\mathbf{u}$ 轉過角度 θ 的旋轉，對應於 $q=\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}(u_1\mathrm{i}+u_2\mathrm{j}+u_3\mathrm{k})$，它作用於向量 $\mathbf{v}$（寫成 $v_1\mathrm{i}+v_2\mathrm{j}+v_3\mathrm{k}$）的方式是 $\mathbf{v}\mapsto q\mathbf{v}q^{-1}$。旋轉的複合就是四元數的相乘。這比使用矩陣或角度更有效率，數值上也更穩定，而且避開了「萬向節鎖」（gimbal lock）：那是失去一個自由度的現象，當年阿波羅（Apollo）太空人使用以陀螺儀為本的導航系統時，就不得不設法繞過這個問題。半角 $\frac{\theta}{2}$ 也透露出一點深刻的端倪：旋轉 360° 得到的是 $q=-1$，而不是 1，物理學家在電子的行為（自旋，spin）中正好看到這個事實。

四平方和

四元數的模是可乘的，$|pq|=|p||q|$，與複數的模一樣。把它展開寫出，便得到歐拉（Euler）的*四平方恆等式*（four-square identity）：兩個四平方和之積，本身也是一個四平方和。這正是拉格朗日（Lagrange）定理的關鍵一步，該定理指出每個正整數都是四個平方數之和；我們會在 Section 7.8 證明這條定理，它是 Section 1.6 中二平方和結果的四維近親。

延伸練習

1. **哈密頓的法則。**利用數對，驗證 $C\circ B=D$ 及 $B\circ C=H$，即 $\mathrm{ij}=\mathrm{k}$ 及 $\mathrm{ji}=-\mathrm{k}$。

2. **只有一個階為 2 的元素。**證明 $E=-1$ 是 Q_8 中唯一階為 2 的元素。由此推斷 Q_8 與正方形的對稱羣（它有五個階為 2 的元素）並不同構。

3. **四平方和。**證明 $\det M(z_1,z_2)=|z_1|^2+|z_2|^2$。利用 $\det(M_1M_2)=\det M_1\det M_2$，推斷兩個四平方和之積是一個四平方和。

4 **子羣。**找出 Q_8 的所有子羣。證明除了 $\{A\}$ 之外，每個子羣都包含 E，並證明 Q_8 是它三個階為 4 的循環子羣的併集（試與 Section 6.6 比較）。

延伸閱讀

- **John Conway & Derek Smith, *On Quaternions and Octonions***（A. K. Peters）。講述四元數和八元數的幾何與算術。程度較深，但引人入勝。
- **John Baez,「The octonions」**，*Bulletin of the American Mathematical Society* 39 (2002)；網上亦可免費閱覽。一篇精彩的綜述；引言部分現在就讀得懂。
- **Andrew Hanson, *Visualizing Quaternions***（Morgan Kaufmann）。講述以四元數處理旋轉，並介紹其在電腦圖像方面的應用。

完整的引導式解答見第 6.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/quaternions.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com