6.6 子羣的併集

工作紙

題目

STEP II 1988，第 9 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s2-q9

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　若 K 是子羣，$a \in K$ 但 $b \notin K$，那麼 ab 可以屬於 K 嗎？

階段 1 兩個子羣（subgroup）無法覆蓋

涵蓋：兩個子羣

想一想 假設 G_1 和 G_2 都不是整個 G。選取 $a \notin G_1$ 和 $b \notin G_2$。那麼 a 和 b 必定分別在哪裏？

停一停，試一試 現在考慮 ab。它必在 G_1 或 G_2 之中。在每一種情況下，把 a 或 b 寫成該子羣中元素的乘積。

階段 2　三個子羣則可以

涵蓋：三個子羣

> **停一停，試一試**　試找一個細小的羣，其中每個元素都是自己的逆元（inverse）。它有哪些含兩個元素的子羣？

背後的數學

對稱的語言

羣在十九世紀同時從幾個方向出現：伽羅瓦（Galois）對多項式的根的置換（permutation）的研究（Section 6.4）、柯西（Cauchy）關於置換的工作，以及幾何學和晶體學中對對稱的研究。上文那個抽象定義，即凡滿足三條公理的東西都是羣，到該世紀末已經確立。它的威力在於一般性：由公理證明的定理，例如本題中的那一個，同時適用於由數、矩陣、對稱和置換構成的各種羣。今天羣無處不在：在粒子物理學中（標準模型建基於對稱羣）、在化學中（分子的對稱性決定光譜）、在密碼學中（橢圓曲線羣，Section 1.9），以及在扭計骰（Rubik's cube）的解法之中。

要用多少個子羣？

這道題引出一個自然的問題：最少要多少個真子羣，它們的併集才是整個羣？根據本題，這個數目永遠不會是 2。1926 年，Gaetano Scorza 證明了一個羣是三個真子羣的併集，當且僅當它以克萊因四元羣為「商羣」（quotient）。1994 年，J. H. E. Cohn 研究了一般的問題，並提出了若干猜想；1997 年，M. J. Tomkinson 證明了沒有任何羣的這個最小數目是七，儘管由 3 到 6 的每個數都會出現。這類問題敘述簡單，卻出奇地微妙，正是羣論的典型。

向量空間

類似的論證可以證明，實數上的向量空間（vector space）（例如平面或三維空間）永遠不可能是有限多個真子空間（proper subspace）的併集：平面不是有限多條通過原點的直線的併集。但在有限域（finite field）上卻可以：兩個元素的域上的平面，其實又是克萊因四元羣，它正是其三條直線的併集。

延伸練習

1 **驗證這個羣。**寫出克萊因四元羣的乘法表，並驗證各條羣公理。證明它與乘法下的羣 $\{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$ 並不相同。（提示：哪些元素是自己的逆元？）

2 **循環羣。**若一個羣的每個元素都是某一個元素 g 的冪，則稱它為循環羣（cyclic group）。證明循環羣永遠不是真子羣的併集，不論用多少個。（提示：哪個子羣包含 g？）

3 **整數。**直接證明 $(\mathbb{Z}, +)$ 不是子羣 $2\mathbb{Z}$（偶數）和 $3\mathbb{Z}$（3 的倍數）的併集。它是否某兩個真子羣的併集？

4 **平面上的直線。**較難證明平面 $\mathbb{R}^2$ 不是有限多條通過原點的直線的併集。（提示：每條直線除原點外，最多只包含拋物線 $y = x^2$ 上的一個點。）

延伸閱讀

- **M. A. Armstrong, *Groups and Symmetry***（Springer）。一本插圖精美的入門教材，以幾何例子帶動全書。
- **Nathan Carter, *Visual Group Theory***（Mathematical Association of America）。用圖像講解羣，最適合在入讀大學前閱讀。
- **Peter Neumann, Gabrielle Stoy & Edward Thompson, *Groups and Geometry***（Oxford University Press）。牛津大學一年級的經典教材。

完整的引導式解答見第 6.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/subgroup-unions.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com