6.4 解四次方程

工作紙

題目

STEP III 2017，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q3

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　把四件物件 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分成兩對，共有多少種分法？

階段 1 缺少的係數（coefficient）

涵蓋：求 A

想一想 把 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 分成兩對，共有多少種分法？

停一停，試一試 在 $y^3 + Ay^2 + By + C = 0$ 中，各根（root）之和是甚麼？另外，$\alpha\beta + \gamma\delta$, ...這三個量之和，用四次方程（quartic）的係數表示又是甚麼？

階段 2　具體的三次方程（cubic）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　代入 $p = 0$、$q = 3$、$r = -6$、$s = 10$。試試常數項（constant term）的細小因數（divisor）。

階段 3　根的配對

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試　$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$ 等於全部六個兩根乘積之和減去其中一個。另外，$\alpha\beta \cdot \gamma\delta$ 是甚麼？

階段 4 **解四次方程**

涵蓋：第 (iii) 部分

停一停，試一試 你已經知道 $\alpha+\beta$ 與 $\gamma+\delta$ 的和與積。要判斷哪個是哪個，可把三根乘積之和用 $\alpha\beta$、$\gamma\delta$、$\alpha+\beta$ 和 $\gamma+\delta$ 表示，再利用 r。

背後的數學

這個竅門為何行得通：根的置換

1770 年，拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）追問三次和四次方程的解法為何行得通，並在根的置換（permutation）中找到了答案。四個根共有 24 種重新排列的方式。在所有這些排列之下，三個量 $y_1=\alpha\beta+\gamma\delta$、$y_2=\alpha\gamma+\beta\delta$、$y_3=\alpha\delta+\beta\gamma$ 只不過是彼此對調：四個根的每一種重新排列，都引致三種配對的一種重新排列（圖 6.4.1）。所以它們滿足一個 3 次多項式，其係數是各根的對稱式。用現代的語言來說，從對稱羣（symmetric group）S_4（全部 24 個置換）到 S_3（三種配對的 6 個置換）有一個滿射的羣同態（group homomorphism），這就是四次方程可以化約為三次方程的原因。

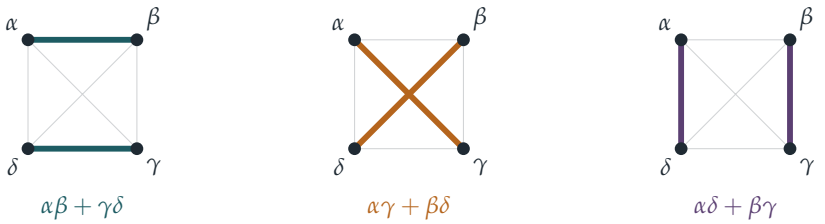

圖 6.4.1 把四個根分成兩對的三種方式，以及預解三次方程中與之對應的根。$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 的任何重新排列，都只會令這三幅圖彼此置換，這就是為甚麼那三個量滿足一個三次方程，而其係數可以用四次方程的係數表示。

五次方程

對於五個根，拉格朗日嘗試尋找一個類似的量，使它在根的置換之下只取寥寥幾個值，卻找不到有用的。1799 年魯菲尼（Paolo Ruffini）提出證明，1824 年阿貝爾（Niels Henrik Abel）把證明補全，兩人證明了：只用四則運算和根式（radicals），並不存在五次方程的一般求根公式。數年之後，伽羅瓦（Évariste Galois）確切地說明了哪些多項式可以用根式求解：就是那些根的對稱羣能以某種特定方式分解成較簡單部分的多項式。對稱羣 S_4 可以這樣分解（經由 S_3 和更小的羣），但 S_5 不可以，因為它包含一個大小為 60 的「單」（simple）部分，無法再進一步分解。1832 年，伽羅瓦在決鬥中喪生，年僅二十歲；決鬥前一晚，他才匆匆把自己的理論寫下來。這套理論如今是數學學位課程中的瑰寶之一，通常在三年級學到。

解三次方程

三次方程本身也可以用類似的竅門求解：把一個缺二次項的三次式（depressed cubic）$x^3 - 3px + q$ 寫成兩個完全立方的組合，從而化約為一個二次方程。這就是練習中那道 2011 年題目所用的方法，它與卡爾達諾公式（Cardano's formula）等價。當三次方程有三個實根時，這條公式在運算途中仍然需要用到複數（complex numbers），正是這個現象迫使數學家認真看待複數（見第 5 章的引言）。

延伸練習

1. **驗證三次方程。**驗證 $y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = pr - 4s$，其中 $y_1 = \alpha\beta + \gamma\delta$，餘類推。（展開並利用 $\sum\alpha = -p$、$\sum\alpha\beta\gamma = -r$、$\alpha\beta\gamma\delta = s$。）

2. **把三次式寫成立方之和。**試做 STEP III 2011，第 3 題（step.maths.org/questions/11-s3-q3）。這道題把三次式寫成兩個立方的組合來求解，與本節的路線截然不同。請用數值方法核對它的答案。

3. **另一個四次方程。**用本節的方法解 $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + 2 = 0$。（預解三次方程有一個根是細小的整數。）

4. **數算置換。**在 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的 24 個置換中，找出所有把配對 $\{\alpha\beta, \gamma\delta\}$ 變回自身的置換。證明這樣的置換共有 8 個。（它們構成 S_4 的一個子羣（subgroup）。）

延伸閱讀

- **Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved***（Simon & Schuster）。五次方程的故事與羣論的誕生，適合一般讀者。

- **Ian Stewart, *Why Beauty Is Truth: A History of Symmetry***（Basic Books）。從巴比倫人的方程講到伽羅瓦，再到其後的發展。
- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。大學本科教科書，其歷史導論所涵蓋的正是本節的內容。

完整的引導式解答見第 6.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/quartic.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com