6.3 以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 為根的多項式

工作紙

題目

STEP II 2023，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　要找一個以 $\sqrt{2}$ 為根的多項式，你會把 $x = \sqrt{2}$ 平方，從而消去平方根。若有兩個不同的平方根，怎樣才能逐一消去？

階段 1　兩個平方根（square root）

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　展開 $(x - \sqrt{2})^2 = 3$。把餘下的平方根單獨留在等號一邊，然後兩邊平方。

階段 2 三個平方根

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 設 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$，則 $x-\sqrt{5}$ 是 f 的一個根（root）。

停一停，試一試 把 $\mathrm{f}(x-\sqrt{5})=0$ 寫成 $P(x)+\sqrt{5}\,Q(x)=0$ 的形式。然後把 $\sqrt{5}$ 單獨留在等號一邊，再兩邊平方。

階段 3　一個三次式（cubic）與一個平方根

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想**　若 $x = a + \sqrt{2}$，則 $x - \sqrt{2}$ 是 $t^3 - 3t + 1$ 的一個根。代入後，把各項按是否含有 $\sqrt{2}$ 分成兩組，然後兩邊平方。

階段 4　兩個立方根（cube root）

涵蓋：第 (iv) 部分

> **停一停，試一試**　平方並不能消去立方根。設 $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$，然後利用 $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$ 把兩邊立方。還剩下甚麼？又該如何把它消去？

背後的數學

域及其次數

所有形如 $p + q\sqrt{2}$（其中 p、q 為有理數）的數所組成的集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$，對加、減、乘、除（除數不為零）都封閉：它是一個域（field）。它是 $\mathbb{Q}$ 上的二維「向量空間」（vector space），以 $1, \sqrt{2}$ 為基底（basis），所以我們說它在 $\mathbb{Q}$ 上的次數（degree）是 2。添

加 $\sqrt{3}$ 便得到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$，其基底為 $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$，次數為 4；再添加 $\sqrt{5}$，次數便是 8（圖 6.3.1）。*塔定律*（tower law）指出，沿着一座域塔往上，次數會相乘。由一個數生成的域，其次數等於該數的*最小多項式*（minimal polynomial）的次數，即該數所滿足的有理係數多項式之中次數最低的一個。可以證明，本題的多項式 f 和 g 都是最小多項式，所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的次數是 4，而 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 的次數是 8：事實上，單憑 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 這一個數，就足以生成整個 8 次域。

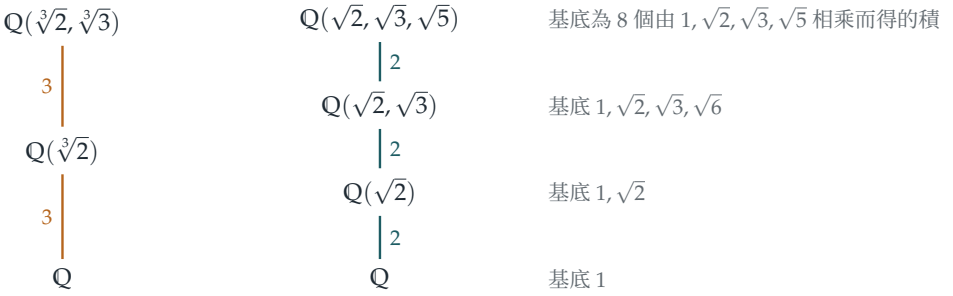

圖 6.3.1 域塔。右：每添加一個平方根，次數便加倍，得出 $2\times2\times2=8$，即 g 的次數。左：每添加一個立方根，次數便變為三倍，得出 $3\times3=9$，即 k 的次數。沿着域塔往上，次數會相乘；這條*塔定律*正是證明某些尺規作圖不可能完成的關鍵。

倍立方

尺規作圖（ruler-and-compass construction）所能作出的長度，只限於由有理數出發、反覆解一次和二次方程而得到的數。每一步都給出一個次數為 1 或 2 的域擴張，所以根據塔定律，每個可作圖（constructible）的長度都位於一個次數為 2 的冪的域之內，而它本身的次數也是 2 的冪。但 $\sqrt[3]{2}$ 的最小多項式是 x^3-2，次數為 3。由於 3 不是 2 的冪，$\sqrt[3]{2}$ 不可作圖，因此約於公元前 430 年提出的提洛島（Delos）問題，即用尺規把立方體的體積加倍，是不可能做到的。旺策爾（Pierre Wantzel）在 1837 年證明了這一點，同時證明了一般的角不可能三等分，並完成了可作圖正多邊形的分類（Section 6.2）。兩千年來的種種嘗試，就此被一個關於次數的論證畫上句號。

代數數構成一個域

本題的方法透過例子說明，代數數之和仍是代數數。一般情況則要用線性代數（linear algebra）來證明：若 α 和 β 的次數分別為 m 和 n，則所有 $\alpha^i\beta^j$（其中 $i<m$，$j<n$）這些數所張成的空間，維數至多為 mn，於是 $mn+1$ 個冪 $1,\alpha+\beta,(\alpha+\beta)^2,\ldots$ 必定線性相關（linearly dependent），由此得出一個次數至多為 mn 的多項式。我們得到的次數 $4=2\times2$、$6=3\times2$ 和 $9=3\times3$ 與這個規律完全吻合。*不是*代數數的數稱為*超越數*

（transcendental number）；e 和 π 都是例子（分別由埃爾米特（Hermite）於 1873 年及林德曼（Lindemann）於 1882 年證明），而林德曼關於 π 是超越數的定理，也證明了化圓為方同樣不可能。

延伸練習

1 **本原元（primitive element）。**設 $y = \sqrt{2} + \sqrt{3}$。證明 $y^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$，並由此推出 $\sqrt{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 9y)$。因此每個形如 $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3} + s\sqrt{6}$ 的數都可以寫成 y 的多項式。

2 **混合根式。**求一個次數為 6 的整數係數多項式，使它以 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ 為根。

3 **不可約性（irreducibility）。**證明 $x^4 - 10x^2 + 1$ 沒有有理根，而且不能寫成兩個整數係數二次式的積。（提示：試用 $(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$。）由此推出 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的次數是 4。

4 **三等分角。**證明 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$，並由此推出 $\cos 20^\circ$ 是 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ 的根。假設這個三次方程沒有有理根（請自行驗證），解釋為何不能用尺規把 60° 的角三等分。

延伸閱讀

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。講述域擴張、塔定律及古典作圖問題，為大學本科生而寫。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 3 章證明古希臘幾大問題不可能解決，毋須任何預備知識。
- **Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond***（Springer）。以近世代數處理尺規作圖。

完整的引導式解答見第 6.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/field-extensions.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com