6.2 高斯的正十七邊形

工作紙

題目

STEP II 1991，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s2-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　為甚麼一道關於正 17 邊形的題目，第一部分卻是關於 $\cos\frac{2\pi}{5}$ 的？

階段 1 正五邊形

涵蓋：第一部分，$\phi = \frac{2\pi}{5}$

想一想 展開 $y^2 = (\cos\phi + \cos 2\phi)^2$，再利用 $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\big(\cos(A+B) + \cos(A-B)\big)$ 把每個乘積化為和。

停一停，試一試 利用 $5\phi = 2\pi$ 化簡 $\cos 3\phi$ 和 $\cos 4\phi$。二次方程（quadratic）的兩個根之中，哪一個才是所求的？

階段 2　十七次單位根之和為零

涵蓋：$\theta = \frac{2\pi}{17}$ 時各餘弦之和

想一想　$\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta$ 是以 $\omega = e^{i\theta}$ 為公比的等比級數（geometric series）的實部（real part）。這個級數的和是多少？

停一停，試一試　利用 $\cos(17-k)\theta = \cos k\theta$ 把各項配對。

階段 3 把餘弦分成兩組

涵蓋：z 的值

想一想 設 z' 為其餘四個餘弦之和，即 $\cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta$。$z + z'$ 是多少？

停一停，試一試 計算 zz'：把它展開成 16 個乘積，將每個乘積化為兩個餘弦，再化簡各個角。$\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ 各出現多少次？

階段 4　二次方程

涵蓋：z 的值

> **想一想**　z 和 z' 是某個二次方程的兩個根。哪一個根是 z？試估計 z 中四個餘弦的值。

背後的數學

高斯週期

為甚麼是 $\{1,2,4,8\}$？以 17 為模（modulo），3 的冪 $3^0, 3^1, 3^2, \ldots$ 會走遍所有非零剩餘（residue）：

$$1, 3, 9, 10, 13, 5, 15, 11, 16, 14, 8, 7, 4, 12, 2, 6.$$

每隔一個取一個，即 $3^0, 3^2, 3^4, \ldots$，得出 1、9、13、15、16、8、4、2，以 17 為模就是 ±1、±2、±4、±8：正好是 z 中的角。另一半給出 $\pm3, \pm5, \pm6, \pm7$，即 z' 中的角。高斯把 ω^k 在這類剩餘類上的和稱為週期（periods）。由於 $17 - 1 = 16 = 2^4$，這些剩餘可以對分四次，而在每一階段，週期都滿足一些二次方程，其係數涉及上一階段的週期。四條二次方程，也就是四個平方根，就從有理數一路通往 $\cos\frac{2\pi}{17}$：

$$\cos\tfrac{2\pi}{17} = \tfrac{1}{16}\Big(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}\Big).$$

每一步都只涉及平方根，而平方根可以用尺規作出（利用相似三角形或半圓），所以正 17 邊形是可作圖（constructible）的。

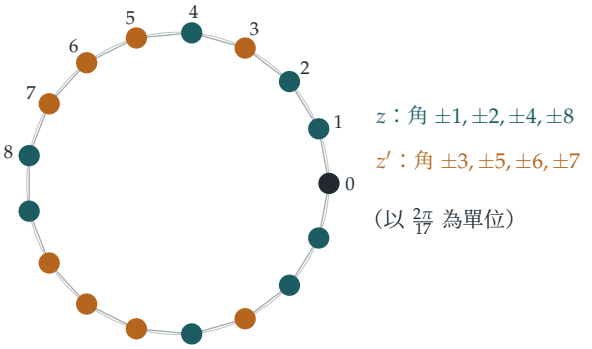

圖 6.2.1　正 17 邊形的頂點，按高斯的兩個週期分成兩組。藍綠色頂點位於角 $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$（以 $\frac{2\pi}{17}$ 為單位），它們的 x 坐標之和是 $2z = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$；琥珀色頂點則給出 $2z' = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$。

哪些正多邊形可以作圖？

高斯斷言，而 Pierre Wantzel 在 1837 年證明：正 n 邊形可以用尺規作出，當且僅當 n 是 2 的冪乘以若干個互不相同的費馬質數(Fermat primes)之積，費馬質數即形如 $2^{2^m}+1$ 的質數。已知的費馬質數有 3、5、17、257 和 65537，它們是 Section 1.1 中的費馬數。（費馬（Fermat）猜想所有這類數都是質數，但歐拉（Euler）證明了 $2^{32}+1$ 可被 641 整除，而此後再沒有人找到其他費馬質數。）所以正 257 邊形和正 65537 邊形都可以作圖；十九世紀時，Johann Hermes 花了大約十年時間推算出正 65537 邊形的作圖法，他的手稿現存於哥廷根。正 7 邊形和正 11 邊形不可作圖，因為 7 和 11 不是費馬質數（$7-1=6$ 和 $11-1=10$ 都不是 2 的冪）；正 9 邊形也不可作圖，因為 $9=3^2$ 把費馬質數 3 重複了。Wantzel 的證明用到 Section 6.3 中關於域次數（field degrees）的理論。

延伸練習

1. **正七邊形（heptagon）。**試做 STEP II 1995，第 6 題（step.maths.org/questions/95-s2-q6）。這道題把高斯將單位根分組的想法用於七次單位根，並求出餘弦之和與正弦之和的準確值。判斷正弦之和的正負號是當中最微妙的一步。

2. **正五邊形。**證明 $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$，並由此描述一個正五邊形的尺規作圖法。

3. **另一個週期。**用數值驗證 $z' = \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta + \cos 7\theta = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$。

4. **生成元（generators）。**證明以 17 為模時，3 的冪給出所有非零剩餘，但 2 的冪卻不然。2 的冪給出哪些剩餘？

延伸閱讀

- **Ian Stewart, *Galois Theory***（CRC Press）。當中有一章講述尺規作圖和正 17 邊形。
- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 3 章以淺白優美的筆觸介紹作圖問題，包括正 17 邊形。
- **Daniel Kehlmann, *Measuring the World***（Quercus）。一本關於高斯和洪堡（Alexander von Humboldt）的詼諧小說，可作輕鬆讀物。

完整的引導式解答見第 6.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch06/gauss-17gon.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com