5.8 圓盤中隱藏的距離

工作紙

題目

STEP III 2013，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　怎樣從圖形看出 $|z-w| \le |z| + |w|$？（把 z 和 $-w$ 想成向量。）

階段 1 展開模

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 利用 $|a|^2 = aa^*$。展開 $|z-w|^2 = (z-w)(z^*-w^*)$，再與 $(|z|+|w|)^2$ 比較。

停一停，試一試 為甚麼 E 是實數？要證明 $E \geq 0$，可利用三角不等式（triangle inequality）。

階段 2　第二個恆等式

涵蓋：第 (ii) 部分

> **想一想**　用同樣的方法展開 $|1 - z w^{*}|^{2}$。

階段 3 不等式

涵蓋：最後的不等式，以及 $|z| < 1$、$|w| < 1$ 的情況

想一想 設 $A = (|z| + |w|)^2$ 及 $B = (1 + |zw|)^2$。根據第 (i) 及第 (ii) 部分，把不等式兩邊平方後，即得 $\frac{A-E}{B-E} \leq \frac{A}{B}$。這在甚麼情況下成立？

停一停，試一試 把 $1 + |z||w| - |z| - |w|$ 因式分解（factorise）。它在甚麼情況下非負？這是否也涵蓋了 $|z| < 1$ 且 $|w| < 1$ 的情況？

背後的數學

非歐幾里得幾何

兩千年來，數學家一直試圖由歐幾里得的其他公理，證明他的第五公設（過直線外一點，恰好有一條直線與該直線平行）。在 1820 和 1830 年代，羅巴切夫斯基（Nikolai Lobachevsky）、鮑耶（János Bolyai）和（私下研究的）高斯（Gauss）意識到這是辦不到的：存在一種完全相容的幾何，其中有無限多條平行線。1882 年，龐加萊（Henri Poincaré）在單位圓盤內找到了這種幾何的一個優美模型。點就是開圓盤內的點；「直

線」是直徑，以及與邊界圓成直角相交的圓弧；而 z 與 w 之間的距離是

$$d(z,w) = 2\tanh^{-1}\rho(z,w), \qquad \text{其中} \qquad \rho(z,w) = \frac{|z-w|}{|1-zw^*|}.$$

當一點趨近邊界圓時，它與圓心的距離趨向無限大：這個圓盤是一整個無限的平面，只是透過一塊令影像變形的透鏡來觀看。

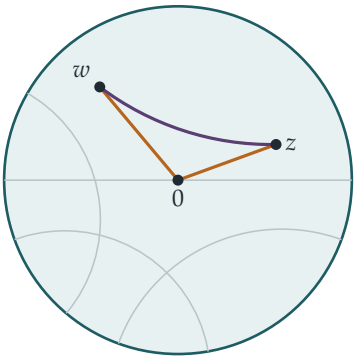

圖 5.8.1　龐加萊圓盤（Poincaré disc）。雙曲「直線」是直徑，或與邊界成直角相交的圓弧（灰色）。以 0、z 和 w 為頂點的雙曲三角形，有兩條邊沿着直徑（琥珀色），一條邊沿着圓弧（紫紅色）。題目中的不等式說明，以雙曲距離計算，紫紅色的邊不會比另外兩條邊加起來更長。

喬裝了的三角不等式

對於 $|z|, |w| < 1$，題目所證明的其實是以下結果。設 $|z| = \tanh a$ 和 $|w| = \tanh b$，則由 0 到 z 和 w 的雙曲距離分別是 $2a$ 和 $2b$。根據 Section 3.8 中 tanh 的加法公式，

$$\frac{|z|+|w|}{1+|zw|} = \frac{\tanh a + \tanh b}{1+\tanh a\tanh b} = \tanh(a+b).$$

所以該不等式就是 $\tanh\bigl(\frac{1}{2}d(z,w)\bigr) \le \tanh(a+b)$，即

$$d(z,w) \le 2a + 2b = d(z,0) + d(0,w).$$

這就是雙曲距離的三角不等式（圖 5.8.1）。相對論的速度相加公式與雙曲幾何，骨子裏是同一回事：狹義相對論中所有可能速度組成的集合，配上適當的距離概念，就是一個雙曲空間。我們會在 Section 7.6 再談這一點。

圓盤的對稱

為甚麼 ρ 是合適的量？對於 $|a| < 1$，映射 $z \mapsto \dfrac{z-a}{1-a^*z}$ 把單位圓盤映到自身，保持雙曲距離不變，並把 a 移到圓心。它們是平移在雙曲幾何中的對應物，而 $\rho(z,w)$ 正是把 w 移

到圓心時的 $|$映射後的$z|$。這些莫比烏斯變換（*Möbius transformation*）是複分析（complex analysis）的核心課題。艾雪（M. C. Escher）的木刻版畫《圓極限》（*Circle Limit*），靈感來自數學家考克斯特（H. S. M. Coxeter）的一幅圖；畫中以全等的魚和天使鑲嵌（tiling）龐加萊圓盤，它們愈近邊緣便愈小，因為雙曲距離在那裏會無限增大。

延伸練習

1 **數值驗算。**取 $z = \frac{1}{2}$ 和 $w = -\frac{1}{2}$。計算不等式的兩邊。然後計算雙曲距離 $d(z,0)$、$d(0,w)$ 和 $d(z,w)$，並驗證三角不等式在這裏取等號。為甚麼？

2 **混合的情況。**求滿足 $|z| < 1 < |w|$ 的 z、w，使不等式不成立。

3 **等距映射（isometry）。**設 $f(z) = \dfrac{z-a}{1-a^*z}$，其中 $|a| < 1$。證明當 $|z| = 1$ 時必有 $|f(z)| = 1$，並且 $f(a) = 0$。證明 $\rho(f(z), f(w)) = \rho(z,w)$。

4 **無限近在咫尺。**證明由 0 到 r（其中 $0 < r < 1$）的雙曲距離是 $\ln \frac{1+r}{1-r}$，並且當 $r \to 1$ 時它趨向無限大。一點要多接近邊界，才會與圓心相距雙曲距離 10？

延伸閱讀

- **Caroline Series, “Hyperbolic geometry” lecture notes**（華威大學 University of Warwick，可免費取得）。一份清晰的入門課程講義，由龐加萊圓盤講起。
- **Jeremy Gray, *Ideas of Space***（牛津大學出版社 Oxford University Press）。由歐幾里得到愛因斯坦（Einstein）的非歐幾里得幾何史。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（牛津大學出版社 Oxford University Press）。第 6 章講述非歐幾里得幾何和莫比烏斯變換，並配有精美的插圖。

完整的引導式解答見第 5.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/poincare-disc.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com