5.7 作為映射的複指數函數

工作紙

題目

STEP II 1997，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s2-q5

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　$z = e^{u}(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ 的模（modulus）和輻角（argument）用 u 和 v 表示是甚麼？

階段 1 **求解** $e^w = \mathrm{i}e$

涵蓋：當 $z = \mathrm{i}e$ 時求 w

想一想 以 u 和 v 表示，$z = e^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v)$ 的模（modulus）和輻角（argument）分別是甚麼？

停一停，試一試 $\mathrm{i}e$ 的模和輻角分別是甚麼？共有多少個解？

階段 2　格線的像

涵蓋：直線 $u = $ 常數和 $v = $ 常數的像（image）

> **想一想**　在直線 $u = c$ 上，甚麼保持不變，甚麼會變化？在直線 $v = d$ 上又如何？

階段 3 一一對應的部分

涵蓋：兩對子集

想一想 哪些點 w 會被映射到第一象限（first quadrant）內？為甚麼這個集合太大，無法與該象限構成一一對應（one-to-one correspondence）？

停一停，試一試 對於 $0 < |z| < 1$：你需要 u 取哪些值？每個輻角都必須恰好取到一次，那麼 v 的區間應該有多長，又應該包含哪些端點？

背後的數學

複對數

在實數線上，ln 是 exp 的反函數。在複平面上，對每一個 $z \neq 0$，方程 $e^w = z$ 都有無窮多個解 w，彼此相差 $2\pi i$ 的倍數，所以「$\log z$」並不是單獨一個數。要得到一個真正的函數，就必須選定一個分支（branch），也就是選定一條像 W_3 或 W_4 那樣的帶狀區域：主分支（principal branch）取 $-\pi < \arg z \leq \pi$。每一個分支都必然在某處有跳躍，跳躍發生在由原點出發的一條射線上，這條射線稱為分支割線（branch cut）。黎曼（Bernhard Riemann）在 1851 年的博士論文中提出了解決辦法：不再堅持對數函數要

定義在一個平面上。它其實定義在一道無窮的螺旋樓梯上，即一個**黎曼曲面**（Riemann surface）；在這個曲面上，對數函數是單值而且光滑的。時至今日，黎曼曲面在幾何、數論和弦論中都佔有核心地位。

角度保持不變

再看一次圖 5.7.1（見網上該節的完整版）。鉛垂和水平的格線相交成直角，它們變成的圓和射線也是如此。這並非巧合：凡是複函數的導數不為零之處，該函數都會保持曲線之間的夾角不變。這樣的映射稱為**保角**（conformal）映射。在局部範圍內，保角映射不過是一次旋轉加上一次縮放，而這正是乘以複數 $f'(z)$ 所起的作用。保角映射可用來解決流體流動、靜電學和熱傳導的問題，方法是把一個複雜的區域變換成一個答案已知的簡單區域。

麥卡托地圖

這裏有一個意想不到的發現，把本節與 Section 4.8 連繫起來。麥卡托（Gerardus Mercator）在 1569 年繪製的地圖，設計的目的是令羅盤方位恆定的航線成為一條直線，這就要求地圖保持角度不變。如果你先把地球以球極投影（stereographic projection）的方式（從北極出發）投影到一個平面上，然後取複對數，所得的結果恰好就是麥卡托投影：經線變成鉛垂線，緯線變成水平線，正如射線和圓在 log 之下變成水平線和鉛垂線一樣。把本節的指數映射倒過來運行，就是航海圖背後的數學。

延伸練習

1. **解方程。**求所有滿足 $e^w = -1$ 的複數 w，以及所有滿足 $e^w = 1 + \mathrm{i}$ 的 w。

2. **正方形的像。**求頂點為 0、1、$1+\mathrm{i}$ 和 i 的正方形在 $z = e^w$ 之下的像，並畫出草圖。

3. **直角。**直接證明圓 $|z| = e^c$ 與射線 $\arg z = d$ 相交成直角，並解釋為甚麼這與直線 $u = c$ 和 $v = d$ 互相垂直是一致的。

4. **平方。**設 c 和 d 為非零實數。求直線 $x = c$ 和 $y = d$ 在映射 $z \mapsto z^2$ 之下的像。證明它們都是拋物線，並且凡相交之處都相交成直角。（若 $c = 0$ 或 $d = 0$，情況會怎樣？）

延伸閱讀

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章和第 4

章以精彩的插圖講解指數函數、對數函數和保角映射。

- **Hilary Priestley, *Introduction to Complex Analysis***（Oxford University Press）。一本清晰易懂的大學本科入門教材。
- **Ian Stewart & David Tall, *Complex Analysis***（Cambridge University Press）。另一本出色的本科入門書，着重幾何觀點。

完整的引導式解答見第 5.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/complex-exponential.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com