5.6 費馬點

工作紙

題目

STEP III 2000，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s3-q3

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　A、B 和 C 在哪裏？它們的輻角（argument）是多少？OA、OB 和 OC 彼此之間的夾角是多少？

階段 1 關鍵恆等式（identity）

涵蓋：恆等式

? **想一想** α^3 是甚麼？把 z^3+1 因式分解（factorise），並利用 $\alpha \neq -1$。

? **想一想** A、B 和 C 在哪裏？求出它們的輻角（argument）。

階段 2　以旋轉（rotation）看等邊三角形（equilateral triangle）

涵蓋：頂點（vertices）N、L 和 M

想一想　三角形 CAN 是等邊三角形，頂點按順時針方向標示。站在 C 點，怎樣由 A 走到 N？試以 $A-C$ 表示 $N-C$。

停一停，試一試　順時針旋轉 $60°$ 即是乘以 $e^{-\mathrm{i}\pi/3}$。先以 α 表示它，再用同樣方法求出 L 和 M，並利用恆等式化簡。

階段 3 通過原點（origin）的三條直線

涵蓋：三條直線

> **停一停，試一試** 比較 L 與 C：兩者都是同一個複數（complex number）的實數倍（real multiple）。各個倍數的正負號說明了甚麼？對 M 與 A，以及 N 與 B，也作同樣的比較。

背後的數學

為甚麼費馬點使距離最小

為甚麼 $PA + PB + PC$ 會在各邊所對的角均為 120° 的那一點取得最小值？以下是一個精彩的論證。把整幅圖繞 B 旋轉 60°，把 A 送到 L'（即 AB 上等邊三角形的頂點），把 P 送到 P'。三角形 BPP' 是等邊三角形，所以 $PB = PP'$，而且 $PA = P'L'$。於是 $PA + PB + PC = L'P' + P'P + PC$，這是一條由 L' 到 C 的路徑的長度。它至少等於 $|L'C|$，而等號恰好在路徑成一直線時成立，這種情況出現於 P 處的各個角均為 120° 之時。所以總長度的最小值是 $|LC| = p + q + r$，與題目所得的結果一致。（這個論證成立的前提是三角形的每個角都小於 120°；否則最小值會在鈍角的頂點取得。）

肥皂膜與斯坦納樹

把一個裝有三根小釘（代表 A、B、C）的框架浸入肥皂水中：肥皂膜會令其表面張力能量減至最小，形成三面薄壁，在費馬點以 120° 相交。若有更多的點，最短的連接網絡是一棵斯坦納樹（Steiner tree），其中有額外的交匯點，每個交匯點都有三條邊以 120° 相交。一般而言，求斯坦納樹在計算上十分困難（這是一個 NP 困難（NP-hard）問題），但它們在實際應用中相當重要，例如設計道路網絡、管道網絡以及電腦晶片上的線路。

拿破崙定理

同一個圖形中還藏着另一件瑰寶：在任意三角形的三邊上所作的三個等邊三角形，它們的中心構成一個等邊三角形。傳統上這個結果歸功於拿破崙（Napoleon Bonaparte）（他是一位熱衷數學的業餘愛好者），不過並無證據顯示這是他發現的。這個定理同樣可以用複數簡短地證明，用到的正是 $1 + \alpha^2 = \alpha$。

延伸練習

1. **檢查字母次序。**證明若各等邊三角形的頂點按逆時針方向標記（即向內作），則三條直線一般不會通過 O。

2. **拿破崙定理。**證明等邊三角形 ABL 的中心是 $\frac{1}{3}(A + B + L)$。利用上文的表達式，證明三個中心構成一個等邊三角形。

3. **最小值。**取 $p = 2$，$q = 1.4$，$r = 1.1$，分別就 P 位於每個頂點以及位於形心（centroid）$\frac{1}{3}(A + B + C)$ 的情況計算 $PA + PB + PC$，並驗證所得的值全部大於 4.5。

4. **等邊三角形的判別法。**證明 z_1、z_2、z_3 構成等邊三角形（不論方向），當且僅當 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$。

延伸閱讀

- **Richard Courant & Herbert Robbins, *What Is Mathematics?***（Oxford University Press）。第 7 章討論費馬點、斯坦納樹和肥皂膜。
- **Liang-shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry***（Mathematical Association of America）。以複數證明多個幾何定理，程度正好與本節相若。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 1 章包括拿破崙定理及其他幾何結果。

完整的引導式解答見第 5.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/fermat-point.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com