5.5 名不副實的有理角

工作紙

題目

STEP III 2022，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　假設 θ 是有理數，設 $\theta = \frac{p}{q}$ 度。試找出一個正整數 k，使得 $\sin(k\theta) = 0$。

階段 1　倍角公式（multiple-angle formulas）

涵蓋：第 (i) 部分

停一停，試一試　寫出 $\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k$，並抽出因子 $\cos^k\theta$。展開 $(1 + \mathrm{i}\tan\theta)^k$，再分別取虛部（imaginary part）和實部（real part）。然後利用 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$。

階段 2 奇偶性（parity）

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 設 $\sec\theta = a$ 為奇數，那麼 $\sec^2\theta - 1$ 是奇數還是偶數？

停一停，試一試 取使 $\sin(k\theta) = 0$ 成立的最小的 k。這樣，正弦公式中括號內的式子必須等於零。為甚麼這會迫使 k 是偶數？然後利用 $\sin k\theta = 2\sin\frac{k\theta}{2}\cos\frac{k\theta}{2}$。

階段 3　矛盾（contradiction）

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試**　取 $m = \frac{k}{2}$，應用餘弦公式。為甚麼括號內的式子永遠不可能等於零？

階段 4　餘切（cotangent）的版本

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想**　若 $\cot\phi = \frac{1}{b}$，$\sec^2\phi - 1$ 是甚麼？它是偶數嗎？然後套用同樣的論證。

背後的數學

無理旋轉

如果 θ 的度數是有理數，不斷重複旋轉 θ，最終會回到起點。如果 θ 是無理數，就永遠不會回到起點，而且會出現奇妙的現象：各點 $k\theta$（以模 360° 計算）會均勻地散佈在整個圓周上，與每一個角都可以任意接近。這就是*等分佈定理*（equidistribution theorem），由赫爾曼．外爾（Hermann Weyl）、瓦茨瓦夫．謝爾賓斯基（Wacław Sierpiński）和

Piers Bohl 在 1910 年前後各自獨立證明。圖 5.5.1 顯示 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 的首 40 個倍數：它們已經逐漸佈滿圓周，而且永遠不會重複。

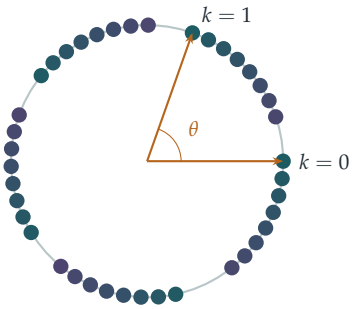

圖 5.5.1 位於角 $k\theta$ 的各點，其中 $k = 0, 1, \ldots, 39$，而 $\theta = \cos^{-1}\frac{1}{3} \approx 70.53°$（顏色隨 k 增加由藍綠色漸變為紫紅色）。由於 θ 是無理數，沒有任何一點會重複出現，而各點均勻地散佈在整個圓周上。

希爾伯特第三問題

1900 年，大衛．希爾伯特為新世紀列出了二十三個問題。第三個問題是：如果兩個多面體（polyhedron）體積相同，是否總可以把其中一個切成有限多塊多面體，再重新拼合成另一個？（對平面上的多邊形而言，答案是肯定的：這就是 Wallace–Bolyai–Gerwien 定理。）不出一年，希爾伯特的學生馬克斯．德恩（Max Dehn）證明了答案是*否定*的：正四面體不能切開再重新拼合成體積相同的立方體。德恩的證明為每個多面體賦予一個由其棱長和二面角（dihedral angle）構成的量，現稱為*德恩不變量*（Dehn invariant），它在切割和重新拼合之下保持不變；立方體的德恩不變量是零，而正四面體的德恩不變量不等於零，原因正是二面角 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$ 不是 $180°$ 的有理數倍。這恰恰就是本題所證明的事實。

尼雲定理

這個結論可以推到多遠？1956 年，伊凡．尼雲（Ivan Niven）證明：如果 θ 的度數是有理數，而且 $\cos\theta$ 是有理數，那麼 $\cos\theta$ 只能是 0、$\pm\frac{1}{2}$、± 1 其中之一。所以餘弦為有理數的「漂亮」角，就只有 $0°$、$60°$、$90°$、$120°$、$180°$ 以及與它們相關的角。證明用到這個事實：$2\cos\theta$ 是某個整數係數首一多項式（monic polynomial）的根，即*代數整數*（algebraic integer），也就是 Section 1.3 末尾提到的概念。

延伸練習

1 **正四面體。**證明正四面體兩個面之間的夾角是 $\cos^{-1}\frac{1}{3}$，並證明甲烷分子中兩條化學鍵（由正四面體的中心連到兩個頂點）之間的夾角是 $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$。

2 **3–4–5 三角形。**證明 3–4–5 三角形最小的角的度數是無理數。（提示：這個角是 $\cot^{-1}\frac{4}{3}$；可改寫上述論證，或考慮高斯整數（Gaussian integer）$4+3\mathrm{i}$ 的各次冪，並證明它們全都不是實數。）

3 **為甚麼 a 要是奇數？**當 $a=2$ 時，論證在哪裏出了問題？$\cos^{-1}\frac{1}{2}$ 是有理數嗎？

4 **尼雲定理的簡單情況。**找出介乎 0° 與 90° 之間、度數為整數而 $\cos\theta$ 為有理數的所有角 θ，並驗證你所列的結果與尼雲定理吻合。

延伸閱讀

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。書中載有關於三角函數有理數值的尼雲定理。
- **Martin Aigner & Günter Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，論希爾伯特第三問題的一章。對德恩的解法有精彩的闡述。
- **Benjamin Yandell, *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers***（A. K. Peters）。講述全部二十三個問題背後的故事。

完整的引導式解答見第 5.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/rational-angles.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com