5.4 正多邊形中的距離

工作紙

題目

STEP III 2016，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s3-q7

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

? **想一想**　把多邊形的頂點放在 n 次單位根上，即 $X_k = \omega^k$。若 P 是點 z，$|PX_k|$ 用 z 表示是甚麼？那麼所有距離之積又是甚麼？

階段 1　因式分解（factorisation）

涵蓋：因式分解

? **想一想**　為甚麼每個 ω^k 都是 $z^n - 1$ 的根（root）？為甚麼它們就是全部的根？

階段 2 垂直平分線（perpendicular bisector）上的一點

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 把各頂點（vertex）放在 $X_k = \omega^k$。若 P 是點 z，則 $|PX_k| = |z - \omega^k|$。所有距離的乘積是甚麼？

停一停，試一試 與 X_0 和 X_1 等距的點都在一條通過 O 的直線上。把 P 寫成 $z = te^{\mathrm{i}\pi/n}$，其中 t 為實數。z^n 是甚麼？

想一想 當 n 是奇數時，把 $t > 0$ 和 $t < 0$ 分開處理。兩種情況在幾何上各代表甚麼？

階段 3　由一個頂點出發的弦（chord）

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　現在 $P = X_0$，其中一個距離是零，所以 $|z^n - 1|$ 派不上用場。哪一個多項式（polynomial）的根是 $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$，但不包括 1？

停一停，試一試　把該多項式寫成 $1 + z + \cdots + z^{n-1}$，然後代入 $z = 1$。

背後的數學

科茨定理

第 (i) 部分是科茨（Roger Cotes）的一條定理。科茨是劍橋一位才華橫溢的年輕數學家，曾編訂牛頓（Newton）《自然哲學的數學原理》（*Principia*）的第二版，1716 年去世，年僅三十三歲（牛頓曾說：「假如他還在世，我們或許已經學到一點東西了。」）。科茨發現，若 P 位於由 O 出發、通過正 n 邊形一個頂點的射線上，則 P 到各頂點的距離之積是 $||OP|^n - 1|$；若 P 位於通過某條邊中點的射線上，則這個積是 $|OP|^n + 1$。他沒有用到複數，就憑這個結果把 $x^n \pm 1$ 分解成實二次因式，而這正是他計算有理函數（rational function）積分時所需要的。這條定理在他去世後，於 1722 年才發表。

正弦之積

由於 $|1-\omega^k| = |e^{-\mathrm{i}\pi k/n} - e^{\mathrm{i}\pi k/n}| = 2\sin\frac{k\pi}{n}$，第 (ii) 部分說的就是

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

這與 Section 5.3 中的餘弦之積互相配對。另一個相關的積給出 z^n-1 的判別式（discriminant）：所有成對的相異 n 次單位根之間距離的平方，乘起來等於 n^n。判別式量度一個多項式的根彼此相隔多遠，在多項式和數域（number field）的代數理論中佔有核心地位，我們會在第 6 章討論。

靜電學與等距分佈

這個結果還有一個物理上的解讀。把 n 個相等的電荷放在一個圓上；令勢能（potential energy）最小的排列（採用二維靜電學的對數勢）就是正多邊形，而能量所涉及的正是 $\sum \ln|X_jX_k|$，即距離之積的對數。「分佈得盡量疏散」的點，在數值分析（numerical analysis）中十分重要（見 Section 3.6，當中最佳的插值點是由正多邊形經 $x=\cos\theta$ 得來的），在隨機矩陣（random matrix）理論中亦然。

延伸練習

1. **檢查小的情況。**就正方形（$n=4$）和等邊三角形（$n=3$）直接驗證第 (ii) 部分。

2. **通過頂點。**證明：若 P 位於由 O 出發、通過 X_0 的射線上，則 $|PX_0|\times\cdots\times|PX_{n-1}| = ||OP|^n - 1|$。

3. **平均距離。**利用第 (ii) 部分和 Section 3.2 的算術平均—幾何平均不等式（AM–GM inequality），證明從 X_0 出發的 $n-1$ 條弦，平均長度至少是 $n^{1/(n-1)}$。就 $n=6$ 求出實際的平均值 $\frac{1}{n-1}\sum_{k} 2\sin\frac{k\pi}{n}$，並加以比較。

4. **所有的弦。**較難 證明：內接於單位圓的正 n 邊形，全部 $\binom{n}{2}$ 條弦的長度之積是 $n^{n/2}$。

延伸閱讀

- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。用複數處理幾何，插圖精美。
- **Ross Honsberger, *Mathematical Gems***（Mathematical Association of America）。收錄了好幾道關於正多邊形的精巧問題。

- **Ronald Gowing, *Roger Cotes: Natural Philosopher***（Cambridge University Press）。科茨的傳記，並介紹他的數學工作。

完整的引導式解答見第 5.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/polygon-distances.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com