5.3 因式分解 $z^{2n}+1$

工作紙

題目

STEP III 2013，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s3-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　$z^{2n} = -1$ 的解在複數平面（complex plane）上的甚麼位置？試就 $n = 2$ 和 $n = 4$ 把它們畫出來。

階段 1　共軛對給出實二次式

涵蓋：因式分解

> **想一想**　把 $(z - e^{\mathrm{i}\theta})(z - e^{-\mathrm{i}\theta})$ 展開，並化簡中間一項的係數。

階段 2 因式分解

涵蓋：因式分解

停一停，試一試 把 $z^{2n}=-1$ 的 $2n$ 個解寫成共軛對（conjugate pairs）$e^{\pm i\theta_k}$。各個 θ_k 是甚麼？為甚麼它們已經是全部的根？

階段 3　代入 $z = \mathrm{i}$

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　$\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i}\cos\theta + 1$ 等於甚麼？當 n 是偶數時，$\mathrm{i}^{2n} + 1$ 又等於甚麼？

停一停，試一試　當 n 是偶數時，化簡 $(-2\mathrm{i})^n$。

階段 4　當 n 是奇數時

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　當 n 是奇數時，其中一個角 θ_k 等於 $\frac{\pi}{2}$。是哪一個？為甚麼這樣一來，直接代入 $z=\mathrm{i}$ 就毫無用處？

停一停，試一試　把因式分解的等式兩邊同除以 $1+z^2$，然後代入 $z=\mathrm{i}$。把餘下的餘弦配對：$\cos\theta_{n+1-k}$ 與 $\cos\theta_k$ 有甚麼關係？

背後的數學

代數基本定理

$z^{2n}+1$ 可以在 $\mathbb{C}$ 上完全分解成線性因式，這是*代數基本定理*（fundamental theorem of algebra）的一個特殊情況：每個複係數的非常數多項式都有一個複根，因而可以完全分解成線性因式。高斯（Gauss）在 1799 年的博士論文中給出了第一個獲廣泛接受的證明，其後又多次重新探討這條定理，提出新的證明。由此可推出，每個實多項式都可以分解成實線性因式和實二次因式，因為非實根以共軛對的形式出現，正如第 1 步所見。這條定理名為「代數」，實質卻屬於分析：每個證明都要用到實數的某種性質，

例如連續性（continuity），而你會在複分析（complex analysis）的入門課程中見到其中一個最巧妙的證明。

正弦與餘弦之積

這個方法可以給出一整族恆等式。以 $z^n - 1$ 取代 $z^{2n} + 1$，就得到

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

它的幾何形式在 Section 5.4 中有證明。這類恆等式會在振動系統的分析中出現（以彈簧相連的 n 個質點的頻率涉及 $\sin \frac{k\pi}{2(n+1)}$），也會在計數問題中出現（某些圖的生成樹（spanning trees）數目，以及長方形的多米諾骨牌鋪砌（domino tilings）數目，都可以用餘弦之積表示）。Kasteleyn 在 1961 年提出的 $m \times n$ 長方形多米諾骨牌鋪砌公式，是一個雙重乘積，其中各項是含 $\cos^2 \frac{j\pi}{m+1}$ 和 $\cos^2 \frac{k\pi}{n+1}$ 的式子。

延伸練習

1. **一個七邊形的乘積。**利用第 (ii) 部分，取 $n = 7$，證明 $\cos \frac{\pi}{14} \cos \frac{3\pi}{14} \cos \frac{5\pi}{14} = \frac{\sqrt{7}}{8}$。然後證明 $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}$。（提示：利用 $\cos\theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ 把各角聯繫起來，或者反覆使用恆等式 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$。）

2. **另一個代入。**在因式分解式中代入 $z = 1$，證明

$$\prod_{k=1}^{n} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4n} = 2^{\frac{1}{2}-n}.$$

3. **分解** $z^6 + 1$**。**把 $z^6 + 1$ 寫成三個實二次式之積，並把它們乘開以驗算答案。

4. **正弦。**以類似方法分解 $z^{2n} - 1$，再除以 $z^2 - 1$，證明

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

延伸閱讀

- **Tristan Needham,** ***Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。第 2 章講述單位根（roots of unity）與多項式，配有精美的圖畫。
- **Benjamin Fine & Gerhard Rosenberger,** ***The Fundamental Theorem of Algebra***（Springer）。收錄這條定理的多個證明，分別來自分析、代數和拓撲，為大學本科生而寫。

- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。一部關於 $\sqrt{-1}$ 的歷史，包括單位根及其應用。

完整的引導式解答見第 5.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/z2n-plus-one.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com