5.2 單位根篩選法

工作紙

題目

STEP I 1990，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s1-q2

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　ω 是 $z^3 - 1 = 0$ 的一個根。試把 $z^3 - 1$ 因式分解。為甚麼由此可得 $1 + \omega + \omega^2 = 0$？

階段 1　模與輻角

涵蓋：單位立方根（cube roots of unity）

想一想　由 $1 + \omega + \omega^2 = 0$ 出發，把 $1 + \omega^2$ 和 $1 + \omega$ 各自寫成 ω 的單獨一個冪（可相差一個正負號）。它們的模（modulus）和輻角（argument）分別是甚麼？

階段 2 篩選器

涵蓋：恆等式

想一想 當 k 是 3 的倍數時，$1+\omega^k+\omega^{2k}$ 等於甚麼？不是倍數時又如何？

停一停，試一試 把 $(1+\omega^r)^n$ 對 $r=1,2,3$ 加起來，每一項都用二項式定理（binomial theorem）展開。然後利用你求得的模和輻角，再計算同一個和。

階段 3　兩個計算

涵蓋：$n = 25$ 的情況，以及第二個和

想一想　當 $n = 25$ 時：2π 的哪一個倍數最接近 $\frac{25\pi}{3}$？

停一停，試一試　計算第二個和時，你需要的是除以 3 後餘數為 2 的位置 k。怎樣把篩選器平移，才能改為挑出這些 k？

背後的數學

離散傅立葉變換

把 3 換成任意的 N，並把 ω 換成 $e^{2\pi \mathrm{i}/N}$。對於一列數 $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$，以下各數

$$\hat{a}_r = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \, \omega^{rk}$$

構成它的離散傅立葉變換，而正是濾波恆等式 $\sum_r \omega^{rk} = N$ 或 0，讓你可以從 $\hat{a}_r$ 還原出 a_k。這個變換把一個訊號分解成它的各個頻率成分。1965 年，James Cooley 和 John Tukey 發表了一種方法，只需大約 $N \log_2 N$ 步而非 N^2 步便能把它算出，這就是快速

傅立葉變換（fast Fourier transform，簡稱 FFT）；高斯（Gauss）早在 1805 年已發現本質上相同的想法，但從未發表。FFT 應用於音訊和圖像壓縮（MP3 和 JPEG）、流動電話訊號、醫學掃描儀，以及極大數字的乘法，並且經常獲列為二十世紀最重要的算法之一。

生成函數

這個濾波器只是一個更宏大想法的其中一例：數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 可以包裝成一個多項式或冪級數（power series）$A(x) = \sum a_k x^k$，稱為它的*生成函數*（generating function），而對數列進行的運算就變成對函數進行的運算。在 1 處求值，就是把數列求和；在單位根處求值，就是挑出各個剩餘類（residue classes）；求導則是把各項以 k 加權。這樣一來，許多計數問題都化為代數問題，而這正是第 9 章的核心技巧。同一個濾波器，配合五次單位根應用於 $(1+x)^n$，便會與正五邊形和黃金比（golden ratio）扯上關係；我們會在 Section 6.1 繼續探討單位根的代數。

延伸練習

1 **偶數位置。**利用二次單位根（1 和 -1）的濾波器，證明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = 2^{n-1}$。

2 **另一個餘數。**求 $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \cdots$ 的公式，並驗證三條公式加起來等於 2^n。

3 **每第四個。**利用 i，證明 $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \cdots = \frac{1}{4}\left(2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{n\pi}{4}\right)$。

4 **整除性。**$\{1, 2, \ldots, 12\}$ 有多少個子集的元素個數可被 3 整除？有多少個子集的元素之和可被 3 整除？（第二問的提示：考慮 $\prod_{j=1}^{12}(1+x^j)$ 在三次單位根處的值。）

延伸閱讀

- **Herbert Wilf, *generatingfunctionology***（A. K. Peters；可於網上免費閱覽）。一本引人入勝的生成函數入門書；單位根濾波器在書中很早便出現。
- **Arthur Benjamin & Jennifer Quinn, *Proofs That Really Count***（Mathematical Association of America）。以計數方法證明二項式恆等式。
- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。內容包括離散傅立葉變換和 FFT。

完整的引導式解答見第 5.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/roots-filter.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com