5.1 梅欽公式

工作紙

題目

STEP III 1987，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/87-s3-q3

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　$5 - \mathrm{i}$ 的輻角是甚麼？$1 + \mathrm{i}$ 的呢？複數相乘時，輻角會怎樣變化？

階段 1 模（modulus）的上下界

涵蓋：第 (i) 部分

? **想一想** 要證明上界（upper bound），可將兩邊平方。兩邊都是非負的。

停一停，試一試 要證明下界（lower bound），可把 $|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ 看成 $(|x|, |y|)$ 與一個單位向量（unit vector）的點積（dot product）。點積最大可以有多大？

階段 2　關鍵的乘法

涵蓋：第 (ii) 部分：第一條公式

想一想　複數（complex numbers）相乘時，輻角（argument）相加。$5-\mathrm{i}$ 和 $1+\mathrm{i}$ 的輻角分別是甚麼？然後逐步計算 $(5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i})$。

停一停，試一試　你所得答案的輻角是甚麼？利用第 (i) 部分，或各個角的大小，證明當中沒有額外多出 2π 的倍數。

階段 3 第二條公式

涵蓋：第 (ii) 部分：第二條公式

> **想一想** 以此類推，哪一個複數乘積的輻角是 $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}+\tan^{-1}\frac{1}{1985}$？把它乘開。

背後的數學

徒手計算 π

為甚麼梅欽公式這樣適合用來計算？級數 $\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ 在 $|x| \le 1$ 時收斂，但在 $x = 1$ 時慢得令人難受：要用 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ 求得 $\frac{\pi}{4}$ 的三位小數，大約需要一千項。取 $x = \frac{1}{5}$ 時，每一項約為前一項的 25 分之一，即每項大約帶來 1.4 位小數；取 $x = \frac{1}{239}$ 時，每項約 4.8 位。梅欽的 100 位小數，只需要第一個級數約 70 項和第二個級數約 20 項。1873 年，William Shanks 用一條梅欽型公式算出 707 位，單是運算就花了多年時間；到了 1944 年，人們發現他在第 528 位出了錯，其後的數字全部不對。

再談高斯整數

形如 $a + b\mathrm{i}$ 而 a、b 為整數的數，就是 Section 1.6 的高斯整數。$5 - \mathrm{i}$ 之所以這樣好用，原因在於一個因數分解（factorisation）：$239^2 + 1 = 57122 = 2 \times 13^4$，在高斯整數中寫成 $(239 + \mathrm{i})(239 - \mathrm{i}) = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})\,(3 + 2\mathrm{i})^4(3 - 2\mathrm{i})^4$，而 $5 - \mathrm{i} = (1 - \mathrm{i})(3 + 2\mathrm{i})$ 正是由同一批高斯質數（Gaussian primes）組成的。尋找梅欽型公式，其實就是把形如 $n^2 + 1$ 的數作因數分解的問題。1899 年，Carl Størmer 正是用這個想法證明了：形如 $\frac{\pi}{4} = a\tan^{-1}\frac{1}{m} + b\tan^{-1}\frac{1}{n}$ 而 a、b、m、n 為整數的公式只有四條，即梅欽的一條，以及歐拉（Euler）、Hermann 和 Hutton 分別發現的三條。

旋轉

乘以一個模為 1 的複數，就是把平面旋轉（rotation）。正因如此，凡是涉及旋轉和角的事情，複數都是最自然的語言：由本章稍後的幾何，到電機工程中的交流電，以至量子力學中的波函數，莫不如此。在 Section 4.2 中，$\tan^{-1}$ 的加法公式（addition formula）來自一個巧妙的代換（substitution）；在這裏，它來自複數的乘法。兩者其實是同一個事實，只是從不同的角度去看。

延伸練習

1 **一個近親。**試做 STEP II 2000，第 4 題（step.maths.org/questions/00-s2-q4）。這道題用與本節相同的方法，證明另一條關於 $\frac{\pi}{4}$ 的反正切公式：把複數相乘，然後讀出輻角。

2 **歐拉公式。**考慮 $(2+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})$，證明 $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$。

3 **Hutton 公式。**證明 $\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$。

4 **要多少項？**估計一下，要把 π 計算到小數點後 20 位，梅欽公式中的兩個級數各需要多少項。然後用計算機實際算出最初幾位。

延伸閱讀

- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。書中載有梅欽型公式的歷史。
- **Jörg Arndt & Christoph Haenel, *Pi Unleashed***（Springer）。生動地介紹古今各種計算 π 的方法。
- **Tristan Needham, *Visual Complex Analysis***（Oxford University Press）。要從幾何角度理解複數，這是最好的一本書。第 1 章講的就是乘法即旋轉加縮放。

完整的引導式解答見第 5.1 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch05/machin.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com