4.9 Holditch 定理

工作紙

題目

STEP III 2011，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s3-q5

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 先在最簡單的情況下檢驗這個定理。若 C 是半徑為 R 的圓，P 描出的是甚麼曲線？環形的面積是多少？

階段 1　由座標求面積

涵蓋：面積公式

想一想 設 $x = r\cos\theta$ 及 $y = r\sin\theta$，全部都是 t 的函數，求 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，並計算 $x\dot{y} - y\dot{x}$。

階段 2 桿的兩端

涵蓋：A 和 B 的座標（coordinates）

? **想一想** 桿由 A 到 B 指向 $(\cos t, \sin t)$ 的方向。P 與兩端的距離各是多少？

階段 3　OA 掃過的面積

涵蓋：OA 掃過的面積（area swept）

想一想　把 $(*)$ 應用於 A。展開 $x_A\dot{y}_A - y_A\dot{x}_A$，並按 a 的冪次把各項分組。

停一停，試一試　把每組的項由 0 積分（integrate）至 2π。至於 $[B]$：把 A 的公式中的 a 換成甚麼，便得到 B？

階段 4 **消去 f**

涵蓋：$\mathcal{C}$ 與 $\mathcal{D}$ 之間的面積

停一停，試一試 A 和 B 都沿同一條曲線 $\mathcal{C}$ 走了一圈。由此可知 $[A]$ 與 $[B]$ 有甚麼關係？利用這一點求 f。

背後的數學

格林定理與求積儀

公式 $(*)$ 是格林定理（Green's theorem）的特殊情況；格林定理把沿閉曲線的積分與曲線內區域上的積分聯繫起來。它的面積形式指出，曲線所包圍的面積是 $\frac{1}{2}\oint(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$，這個積分只需沿邊界走一圈就能算出。工程師利用這一點造出了求積儀（planimeter），這是十九世紀發明的一種機械儀器（其中以 Jakob Amsler 在 1854 年的設計最為成功）：用指針沿着地圖或圖表上某個圖形的邊界描一圈，一個小輪就會記錄所包圍的面積。求積儀曾用來量度土地面積、根據示功圖（indicator diagram）計算蒸汽機所作的功，還有許多其他用途，直至被數碼方法取代為止。Holditch 定理與此密切相關：那根桿就像求積儀的臂。

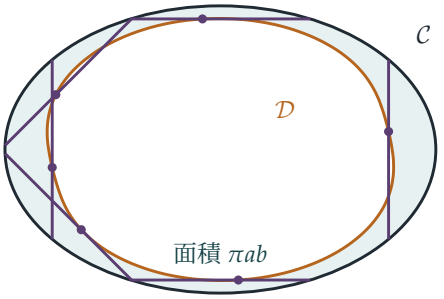

圖 4.9.1　Holditch 定理的例子：橢圓的半軸（semi-axes）為 3 和 2，桿長 2.5，其中 $a = 1$、$b = 1.5$。圖中畫出了桿的若干位置（紫色），並標出點 P。P 所描出的曲線 $\mathcal{D}$（琥珀色）是用數值方法算出的，而兩條曲線之間的陰影環形面積為 $4.7124\ldots = 1.5\pi$，與定理的預測完全吻合。

細節條款

Holditch 陳述這個定理時，對條件不大講究，但定理其實需要一些條件。桿必須能夠在兩端都留在曲線上的情況下繞足一整圈，而描出的曲線 $\mathcal{D}$ 必須是只描一次的簡單閉曲線（simple closed curve）；如果桿相對於 $\mathcal{C}$ 的闊度太長，$\mathcal{D}$ 可能會自相交，這時公式給出的「面積」會把某些區域計算兩次，或以負號計算。題目假設 $\mathcal{D}$ 是一條包含 O 的凸曲線，從而避開了這些困難。找出定理究竟在甚麼條件下成立，正好說明一個優美的想法必須經過嚴格化才站得住腳，這也是第 3 章的主題。

延伸練習

1 **橢圓的面積。**利用 $(*)$，取 $x = p\cos t$、$y = q\sin t$，證明半軸為 p 和 q 的橢圓面積為 πpq。

2 **圓的情況。**證明相交弦定理：若圓的兩條弦相交於 P，則每條弦被分成的兩段，其長度之積相等。由此推導出圓的 Holditch 定理。

3 **中點。**證明由 $f = \pi(a - b)$ 可知，當 P 是桿的中點時，$f = 0$。這時環形的面積是多少？答案以桿長 L 表示。

4 **三角形。**較難利用 $(*)$，沿邊界繞行一周，求頂點為 $(0,0)$、(x_1, y_1)、(x_2, y_2) 的三角形的面積，並證明它等於 $\frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$。這就是求任意多邊形面積的「鞋帶公式」（shoelace formula）的起點。

延伸閱讀

- **Mark Levi, *The Mathematical Mechanic***（Princeton University Press）。以桿、輪和彈簧等物理推理來證明數學結果，與本節的精神一脈相承。
- **H. M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That***（Norton）。向量微積分（vector calculus）的非正式入門，內容包括格林定理。
- **Hamnet Holditch, "Geometrical theorem"**，*Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics* 2 (1858)。原始的短文，只有短短一段，完全沒有提及任何細節條款。

完整的引導式解答見第 4.9 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/holditch.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com