4.8 切球形麵包

工作紙

題目

STEP I 2001，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s1-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 半徑為 a 的球，是由哪一條曲線繞 x-軸旋轉而成的？該曲線的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 是甚麼？

階段 1 麵包皮公式的化簡

涵蓋：麵包皮面積與切片數目成正比

想一想 哪一條曲線繞 x 軸旋轉（rotate）後，會得出半徑為 a 的球體（sphere）？這條曲線的 $\frac{dy}{dx}$ 是甚麼？

停一停，試一試 就這條曲線計算 $y\sqrt{1+(y')^2}$。你會發現一件奇妙的事。

階段 2　麵包皮面積與切片數目成正比

涵蓋：麵包皮面積與切片數目成正比

想一想　那麼，一片厚度為 h 的切片，其麵包皮面積是多少？這與切片所在的位置有關嗎？

階段 3　「脆皮」條件

涵蓋：半徑須滿足的條件

想一想　按照題目的提示：從 $x = a$ 的一端開始吃切片，使餘下的部分由 $x = -a$ 延伸至 $x = -a + t$。求出 V 和 A。代換（substitution）$s = x + a$ 會有幫助。

停一停，試一試　無論吃掉了多少片，這項規定都必須成立，即對所有滿足 $0 < t \leq 2a$ 的 t 都成立。在這個範圍內，$\frac{V}{A}$ 的最大值是多少？

階段 4　題目之外：$2\frac{2}{3}$ 足夠嗎？

涵蓋：題目之外

想一想　題目沒有問：你求得的關於 a 的條件是否也是充分的？如果從兩端同時吃切片，又會怎樣？

背後的數學

阿基米德的帽盒定理

阿基米德在《論球與圓柱》（*On the Sphere and Cylinder*）中證明了：球面上夾在兩個平行平面之間的環帶，其面積等於這兩個平面在包裹球的圓柱上所截出的環帶的面積（圖 4.8.1）。我們的計算正是這條帽盒定理（hat-box theorem）：半徑為 a 的圓柱每單位長度的麵包皮面積為 $2\pi a$，球也是如此。考慮整個球，它的表面積（surface area）等於圓柱的曲面面積，即 $2\pi a \times 2a = 4\pi a^2$。阿基米德認為，這個結果連同「球的體積是圓柱體積的三分之二」這一事實，是他畢生最出色的成就。西塞羅（Cicero）於公元前 75 年到訪敘拉古（Syracuse）時，正是憑着尋找刻在墓上的球與圓柱，找到了那座雜草叢生的墳墓。

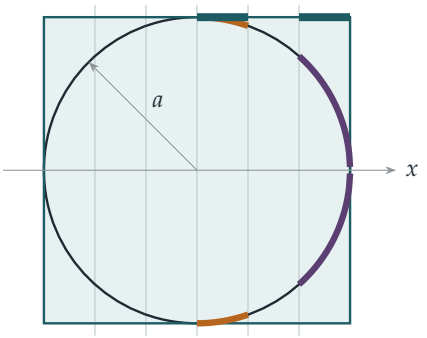

圖 4.8.1 半徑為 a 的球形麵包置於包裹它的圓柱之內的橫截面，麵包被切成厚度相等的薄片。中間的薄片（琥珀色）的麵包皮是一段短而接近水平的弧，離軸較遠；末端的薄片（紫紅色）的麵包皮是一段長而陡峭的弧，離軸較近。繞 x-軸旋轉後，兩者的麵包皮面積都恰好等於圓柱上對應環帶（藍綠色）的面積：$2\pi a$ 乘以厚度。

地球的地圖

帽盒定理提供了一種繪製保持面積不變的地球地圖的方法。把地球儀上的每一點沿水平方向向外投影到包裹它的圓柱上，然後把圓柱攤開。球面上的環帶會映射到圓柱上面積相同的環帶，而任何區域也是如此。這就是蘭伯特（*Lambert*）圓柱等積投影（Lambert's cylindrical equal-area projection，1772 年）。它在兩極附近會令形狀嚴重失真，但面積是如實的，不像人們熟悉的麥卡托（Mercator）投影那樣，令格陵蘭看起來與非洲一樣大（其實格陵蘭大約只有非洲的十四分之一）。高斯（Gauss）有一條著名的定理，稱為「絕妙定理」（*Theorema Egregium*，1827 年），它說明沒有任何球面地圖可以同時保持面積和形狀：每一幅平面的地球地圖都必定有所失真。

球面上的隨機點

以下是一個實際的應用。要在球面上均勻（uniformly）隨機地選取一點，你或許會嘗試均勻地選取緯度（latitude）和經度（longitude），但這樣會令點在兩極附近過於密集。帽盒定理給出了正確的做法：在 $-a$ 與 a 之間均勻地選取高度 x，並在 0 與 2π 之間均勻地選取經度。由於面積與高度成正比，這樣選出的點恰好是均勻分佈的。物理學和電腦圖像的電腦模擬都採用這個方法。（值得一提的是，這個方法只在三維空間中有效：對於四維或更高維的球面，相應的命題並不成立。）

延伸練習

1 **整個麵包。**證明對於整個未切開的麵包，$V/A = \frac{a}{3}$。為甚麼題目中的條件比 $\frac{a}{3} < 1$ 更難滿足？

2 **熱帶地區。**地球表面有多大比例位於南緯 23.4° 與北緯 23.4° 之間？（把地球視為一個球。由於面積與高度成正比，你只需要用到 $\sin 23.4°$。）

3 **其他形狀。**證明對於拋物面（paraboloid）形狀的麵包（把 $y = \sqrt{x}$ 繞 x-軸旋轉），每片的麵包皮並非常數。對於哪些曲線 $y(x)$，$y\sqrt{1 + (y')^2}$ 是常數？（解出相應的微分方程（differential equation）。）

4 **體積。**利用體積公式，證明球的體積是包裹它的圓柱體積的三分之二，正如阿基米德所發現的那樣。

延伸閱讀

- **Sherman Stein, *Archimedes: What Did He Do Besides Cry Eureka?***（Mathematical Association of America）。為現代讀者講解阿基米德的數學。
- **Timothy Gowers, *Mathematics: A Very Short Introduction***（Oxford University Press）。書中關於幾何的一章介紹了曲面的幾何。
- **John Snyder, *Flattening the Earth***（University of Chicago Press）。兩千年來的地圖投影史。

完整的引導式解答見第 4.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/spherical-loaf.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com