4.7 變分法

工作紙

題目

STEP III 2014，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　為甚麼 $I \geq 0$ 並非顯而易見？試用 $y = 1 - x$，它滿足 $y(1) = 0$。

階段 1 配方法（completing the square）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 展開 I_1 中的平方，然後計算 $I - I_1$。利用 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$。

停一停，試一試 被積函數（integrand）$y^2 \sec^2 x + 2yy' \tan x$ 是一個恰當導數（exact derivative）。它是哪個函數的導數？然後利用 $y(1) = 0$。

階段 2　何時 $I = 0$？

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　若一個連續（continuous）非負（non-negative）函數的積分為零，你能對這個函數作出甚麼結論？

停一停，試一試　因此 $y' + y\tan x = 0$。解這個方程（兩邊乘以 $\sec x$），並利用 $y(1) = 0$。

階段 3 一般情形

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 以 $\int_0^1 (y' + ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$ 重複第 (i) 部分的做法。b 必須取甚麼值，餘下的各項才能構成一個恰當導數？

停一停，試一試 這個論證在哪裏可能失效？考察 $\tan ax$ 在 $0 \le x \le 1$ 上的情況。

階段 4　臨界情形

涵蓋：$a = \frac{\pi}{2}$ 的情形

> **想一想**　在第 (i) 部分中，使 $I = 0$ 的函數須滿足 $y' + y\tan x = 0$。現在對應的方程是甚麼？它有哪些解？當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，其中是否有一個解滿足 $y(1) = 0$？

背後的數學

最速降線與一門學科的誕生

1696 年，約翰·伯努利（Johann Bernoulli）向歐洲的數學家發出挑戰：求一條曲線，使珠子沿着它從一點滑到另一點所需的時間最短。這就是最速降線（brachistochrone）問題。提交解答的有牛頓（Newton）（他匿名投稿，一夜之間解出；伯努利說他「從爪子認出了獅子」）、萊布尼茲（Leibniz）、洛必達（l'Hôpital）和雅各布·伯努利（Jakob Bernoulli）。答案是一條擺線（cycloid）。到了 1750 年代，歐拉（Euler）和年輕的拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange）把這些個別的技巧變成一套通用的方法：如果 y 令 $\int F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$ 取平穩值，那麼 y 滿足*歐拉－拉格朗日方程*（Euler–Lagrange equation）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

對於我們的 J，$F = (y')^2 - a^2y^2$，而歐拉－拉格朗日方程就是 $y'' + a^2y = 0$：簡諧運動（simple harmonic motion）。

為何是 $\pi/2$？

當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，J 的最小值是 0，而且只有 $y \equiv 0$ 才能取得。當 $a = \frac{\pi}{2}$ 時，最小值仍然是 0，但多了一個函數能取得它。當 $a > \frac{\pi}{2}$ 時，同一個函數 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 給出

$$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2} < 0,$$

而只要把 y 按比例放大，J 就可以負得要多大有多大：根本沒有最小值（圖 4.7.1）。臨界值就是第一個令 $y'' + a^2 y = 0$ 有非零解滿足邊界條件的 a（邊界條件是 $y(1) = 0$，以及在自由端的「自然」條件 $y'(0) = 0$）。這是一個*特徵值問題*（eigenvalue problem），而 $a^2 = \frac{\pi^2}{4}$ 是它最小的特徵值。試與 Section 3.7 比較：那裏把函數在長度為 π 的區間的兩端都固定，得出臨界值 1；這裏區間長度為 1，而且只固定一端，相當於長度為 2 的區間的一半，所以臨界的 a 是 $\frac{\pi}{2}$。

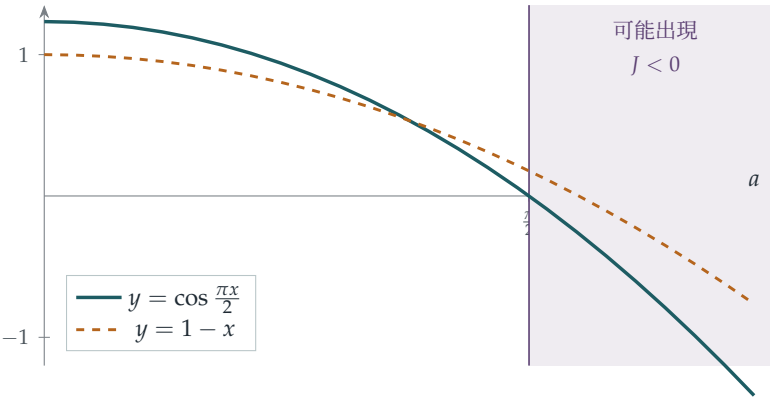

圖 4.7.1　對於兩個滿足 $y(1) = 0$ 的試驗函數，J 的值隨 a 的變化。對於 $y = 1 - x$，$J = 1 - \frac{a^2}{3}$ 要到 $a > \sqrt{3}$ 才變成負數。對於 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，$J = \frac{\pi^2}{8} - \frac{a^2}{2}$ 在 $a > \frac{\pi}{2}$ 時隨即變成負數，而且沒有函數能做得更好：當 $a < \frac{\pi}{2}$ 時，對每個 y 都有 $J \geq 0$。

物理學與最小作用量原理

後來發現，變分法描述的竟是大自然本身。在十八和十九世紀，人們逐漸明白運動定律可以這樣表述：力學系統的運動方式，會令一個稱為*作用量*（action）的積分取平穩值，這就是最小作用量原理（principle of least action）。同樣，光沿着需時最短的路徑前進（費馬原理，Fermat's principle），這解釋了折射現象。到了二十世紀，同一個想法通過費曼（Richard Feynman）的「路徑求和」（sum over paths），成為量子力學的基礎。本題中的二次積分是最簡單的例子，而它們引出的特徵值問題，會在 Section 8.6 以量子振子能級的面貌再次出現。

延伸練習

1 **越過臨界值。**證明若 $a > \frac{\pi}{2}$，則 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$ 給出 $J < 0$。

2 **歐拉－拉格朗日方程。**較難設 y 在滿足 $y(1) = 0$ 的函數之中令 J 取最小值。對任何滿足 $\eta(1) = 0$ 的函數 η 和任何數 ε，都有 $J(y + \varepsilon\eta) \geq J(y)$。把 $J(y + \varepsilon\eta)$ 按 ε 的冪

展開，並由此推出 $\int_0^1 (y'\eta' - a^2 y\eta)\,\mathrm{d}x = 0$。用分部積分法（integration by parts）證明 $y'' + a^2 y = 0$ 及 $y'(0) = 0$（假設 y 足夠光滑）。

3 **較長的區間。**用代換法（substitution）證明：若 $y(L) = 0$，則 $\int_0^L \left((y')^2 - a^2 y^2\right)\mathrm{d}x \geq 0$ 對所有 y 成立，當且僅當 $a \leq \frac{\pi}{2L}$；並證明只有當 $a = \frac{\pi}{2L}$ 時，才有非零的 y 令等號成立。

4 **擺線。**查閱最速降線問題，並找出擺線的參數方程（parametric equations）。證明在一條倒置的擺線上，珠子無論從哪一點由靜止釋放，到達最低點所需的時間都相同（這是等時（tautochrone）性質，由惠更斯（Huygens）於 1659 年發現）。

延伸閱讀

- **Paul Nahin, *When Least Is Best***（Princeton University Press）。講述最優化的歷史與數學，包括最速降線，為學生而寫。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***，第二卷第 19 章（「The principle of least action」，最小作用量原理）。可在網上免費閱讀。
- **Bruce van Brunt, *The Calculus of Variations***（Springer）。一本大學本科教科書；頭幾章只需要高級程度（A-level）的微積分知識。

完整的引導式解答見第 4.7 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/variations.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com