4.6 沒有公式的積分

工作紙

題目

STEP III 2016，第 3 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s3-q3

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 若 $\int \mathrm{f}(x) e^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} e^{x} + C$，P 和 Q 必須滿足甚麼方程？（對右邊求導。）

階段 1 **因式** $x+1$

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 對 $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}e^x$ 求導（differentiate），並令它等於 $\mathrm{f}(x)e^x$。消去分母，得出一個多項式（polynomial）之間的恆等式（identity）。

停一停，試一試 在該恆等式中代入 $x=-1$。$\mathrm{Q}(-1)$ 必須滿足甚麼條件？

階段 2　次數

涵蓋：第 (i) 部分

> **停一停，試一試**　設 P 和 Q 的次數（degree）分別為 p 和 q。在 $\mathrm{P}'\mathrm{Q} - \mathrm{P}\mathrm{Q}' + \mathrm{P}\mathrm{Q}$ 中，哪一項的次數最高？比較等式兩邊的次數。

階段 3　求 P

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　當 $\mathrm{Q} = x + 1$ 時，P 是二次多項式（quadratic）。設 $\mathrm{P} = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$，代入後比較係數（coefficient）。

階段 4 不可能的情況

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 寫出 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 時的恆等式。仿照第 (i) 部分，證明 $Q(-1) = 0$。

停一停，試一試 設 $Q = (x+1)^k R$，其中 $k \geq 1$ 且 $R(-1) \neq 0$。代入後，盡量約去 $x+1$ 的因式，再代入 $x = -1$。由此可知 $P(-1)$ 有甚麼性質？

背後的數學

極點與對數

第 (ii) 部分背後有一幅簡單的圖像。被積函數（integrand）$\frac{e^x}{x+1}$ 在 $x = -1$ 處有一個**單極點**（simple pole）：在該點附近，它的表現像 $\frac{e^{-1}}{x+1}$。對 $\frac{1}{x+1}$ 積分得 $\ln|x+1|$，所以原函數（antiderivative）在 -1 附近的表現應該像 $e^{-1}\ln|x+1|$，以對數的速度趨向 $-\infty$（圖 4.6.1）。但有理函數乘以 e^x 只能以冪 $(x+1)^{-k}$ 的方式趨向無窮，其導數因而有一個階數為 $k+1 \geq 2$ 的極點，絕不會是單極點。有理函數無法產生對數式的表現；第 4 階段的代數運算，正是這個觀察的嚴格版本。相反，在第 (i) 部分，被積函數有一個二階極點，而這正是帶有單極點的函數求導後的模樣，所以答案才有可能是有理的。

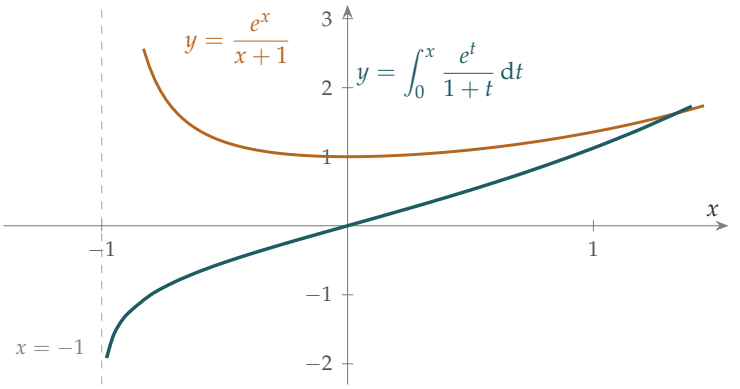

圖 4.6.1　被積函數 $\frac{e^x}{x+1}$（琥珀色）在 $x = -1$ 處有一個單極點。它的原函數（藍綠色，以數值方法計算）完全存在，但當 $x \to -1^+$ 時，它以對數的速度趨向 $-\infty$，表現像 $e^{-1}\ln(x+1)$。沒有任何有理函數乘以 e^x 能有這樣的表現。

劉維爾與 Risch 算法

在 1830 年代，劉維爾（Joseph Liouville）建立了一套理論，研究哪些積分可以用*初等函數*（elementary functions）表示（即由多項式、指數函數、對數函數、根式和三角函數經通常的運算構成的函數）。他的其中一個結果指出：若 f 和 g 是有理函數而 g 不是常數，則 $\int \mathrm{f}(x)e^{\mathrm{g}(x)}\,dx$ 只有在等於 $\mathrm{R}(x)e^{\mathrm{g}(x)}$（另加一個常數）時才是初等的，其中 R 是某個有理函數。（對 g 的條件不可或缺：當 $\mathrm{g} = 0$ 而 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{x}$ 時，積分是 $\ln|x|$，它是初等函數，卻不是有理函數。）所以本題排除了有理形式，其實就證明了 $\int \frac{e^x}{x+1}\,dx$ 根本不是初等函數。同一定理的其他版本可證明 $\int e^{-x^2}\,dx$ 和 $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ 都不是初等的。1969 年，Robert Risch 把劉維爾的想法發展成一套算法（algorithm），可就一大類函數判定初等積分是否存在，並在存在時把它求出來。電腦代數系統（computer algebra system）內部所用的，就是這套算法的不同版本。

特殊函數

當一個積分沒有初等形式時，數學家會給它起個名字，把它當作新的函數來研究，正如我們在 Section 3.9 中處理朗伯 W 函數（Lambert W function）那樣。這裏的積分本質上就是*指數積分*（exponential integral）$\mathrm{Ei}(x)$，它出現於熱傳導問題，也出現於*對數積分*（logarithmic integral）$\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x)$ 之中，後者是不超過 x 的質數（prime）個數的最佳簡單近似（Section 1.2）。當 $x < 0$ 時，它是 $\int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt$。當 $x > 0$ 時，這個積分會穿過 $t = 0$ 處的無窮尖峯，所以 $\mathrm{Ei}(x)$ 的定義是先挖去尖峯周圍的一個小區間 $(-\varepsilon, \varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0$：這就是*柯西主值*（Cauchy principal value）。

延伸練習

1 **兩個可行的例子。**證明 $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{x+1} + C$ 及 $\int \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-1}{x+1}e^x + C$。

2 **高斯函數。**證明不存在多項式 P 使得 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{P}(x)e^{-x^2} + C$。（提示：求導後比較次數。）

3 **另一個極點。**仿照第 (ii) 部分的論證，證明 $\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ 不能寫成 $\frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)}e^x + C$ 的形式。

4 **何時可行？**假設 f 是多項式，且對某個多項式 P 有 $\int \frac{\mathrm{f}(x)}{(x+1)^2}e^x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{P}(x)}{x+1}e^x + C$。證明 $(x+1)\mathrm{P}' + x\mathrm{P} = \mathrm{f}$，並透過計算此式及其導數在 $x = -1$ 的值，證明 $\mathrm{f}(-1) + \mathrm{f}'(-1) = 0$。驗證這個條件對 $\mathrm{f}(x) = x^3 - 2$ 以及練習 1 的例子都成立。較難你能證明這個條件也是充分的嗎？

延伸閱讀

- **Brian Conrad, “Impossibility theorems for elementary integration”**（初等積分的不可能性定理）。可免費取得的講義，配合例子講解劉維爾定理。
- **Elena Anne Marchisotto & Gholam-Ali Zakeri, “An invitation to integration in finite terms”**（有限形式積分導引），*The College Mathematics Journal* 25 (1994)。劉維爾理論的淺白入門。
- **Manuel Bronstein, *Symbolic Integration I***（Springer）。講述電腦代數系統實際上如何求積分。程度較深。

完整的引導式解答見第 4.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/no-formula.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com