4.5 大二學生之夢

工作紙

題目

STEP III 2009，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/09-s3-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　函數 x^x 在 $x = 0$ 處無法用你所知的任何公式定義（0^0 的意義並不明確）。當 x 從上方趨近 0 時，它的表現如何？試用計算機計算 $x = 0.1$、0.01、0.001 的情況。

階段 1　冪勝於對數

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　當 $x \to 0^+$ 時，$\ln x \to -\infty$。哪一個代換（substitution）可以把 $x \to 0^+$ 變成 $t \to \infty$，並把 $x^m(\ln x)^n$ 變成類似 $e^{-mt}t^n$ 的式子？

停一停，試一試　對於 x^x，寫成 $x^x = e^{x\ln x}$，然後取 $m = n = 1$ 應用第一個結果。

階段 2　歸約公式

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　對 I_{n+1} 使用分部積分法（integration by parts）。應該對哪一個因子積分？

停一停，試一試　邊界項（boundary term）在 $x = 1$ 處以及當 $x \to 0$ 時會怎樣？（利用第 (i) 部分。）然後由 I_0 開始，反覆應用歸約公式（reduction formula）。

階段 3 **級數**

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 利用 e^y 的級數（series）展開 $x^x = e^{x \ln x}$。每一項是甚麼樣子的？

停一停，試一試 由 0 至 1 逐項積分（integrate term by term），並取 $m = n$ 應用第 (ii) 部分。

背後的數學

交換求和與積分

第 3 階段不動聲色地把無窮和與積分交換了次序：$\int \sum = \sum \int$。這樣做並非總是容許的。在大學裏，你會遇到交換後不成立的例子，也會學到一些定理，說明甚麼時候可以放心交換。最簡單的一個定理指出，當級數一致收斂(converges uniformly)時，交換是安全的：即級數的尾部可以同時在每一個 x 處都變得很小。在這裏，$|x \ln x| \le \frac{1}{e}$ 在 $(0, 1]$ 上成立，所以無論 x 是甚麼，第 n 項的大小最多是 $\frac{e^{-n}}{n!}$。這些上界之和收斂，因此尾部一致地小，交換也就有了根據。這個論證稱為魏爾斯特拉斯 M 判別法(Weierstrass M-test)，是分析學（analysis）中最常用的工具之一。

為何這個「夢」會成真

這條恆等式很特別。它有賴 $\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ 中的冪與積分 $\int_0^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ 完全吻合，當中的 $n!$ 恰好全部約去。追根究柢，這個積分其實是喬裝了的伽瑪函數（Gamma function）：代換 $x = e^{-t/(n+1)}$ 把它變成 $\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n\,\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}}$，與 Section 4.4 連繫起來。

名字的由來

「大二學生之夢」這個名字，是 Jonathan Borwein 與合著者在 2004 年出版的 *Experimentation in Mathematics* 一書中所創，用來與「大一新生之夢」$(a+b)^n = a^n + b^n$ 配對（有趣的是，後者在某些數系中是成立的：在模質數 p 的算術中，$(a+b)^p = a^p + b^p$，因為中間所有的二項式係數（binomial coefficient）都可被 p 整除）。Borwein 是實驗數學（experimental mathematics）的先驅，這門學問利用電腦去發現像本題這樣的恆等式，然後再以人手證明。

延伸練習

1. **配對的等式。**證明 $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n} \approx 1.2913$。

2. **極小值。**證明 x^x 在 $(0,\infty)$ 上的極小值出現於 $x = \frac{1}{e}$，其值為 $e^{-1/e}$。

3. **需要多少項？**對於各項遞減的交錯級數（alternating series），截斷後的誤差小於第一個被略去的項。要準確至小數點後六位，需要取 $\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x$ 的級數的多少項？

4. **一個近親。**用同樣的方法證明 $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{9}$，以及 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$。（根據 Section 2.4，這等於 $-\frac{\pi^2}{6}$。）

延伸閱讀

- **Jonathan Borwein, David Bailey & Roland Girgensohn, *Experimentation in Mathematics***（A. K. Peters）。這個名字的出處，書中還有許多由電腦發現的恆等式。
- **William Dunham, *The Calculus Gallery***（Princeton University Press）。由牛頓（Newton）到勒貝格（Lebesgue）的分析學傑作，包括伯努利的工作。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。清楚講解一致收斂，以及何時可以交換求和與積分。

完整的引導式解答見第 4.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/sophomores-dream.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com