4.4 沃利斯、Beta 與二分之一的階乘

工作紙

題目

STEP II 1995，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/95-s2-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　u_0 和 u_1 是甚麼？當 n 很大時，$\sin^n t$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的圖像大致是甚麼樣子？

階段 1 遞推公式（reduction formula）

涵蓋：遞推公式

想一想 把 $\sin^n t = \sin t \cdot \sin^{n-1} t$ 寫出來，然後用分部積分法（integration by parts）：對 $\sin t$ 積分，對 $\sin^{n-1} t$ 求導。

停一停，試一試 新的被積函數（integrand）含有 $\cos^2 t$。把它寫成 $1 - \sin^2 t$，便可回到 u_n 和 u_{n-2}。然後乘以 u_{n-1}。

階段 2　不變量（invariant）

涵蓋：$nu_n u_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$

> **停一停，試一試**　這個關係式說明，當 n 減一時，$nu_n u_{n-1}$ 保持不變。當 $n = 1$ 時它的值是多少？計算 u_0 和 u_1。

階段 3 **夾逼（squeeze）**

涵蓋：略圖、不等式與極限

想一想 對於 $0 < t < \frac{\pi}{2}$，$\sin^n t$ 與 $\sin^{n-1} t$ 相比，哪個較大？由此可知 u_n 與 u_{n-1} 有何關係？

停一停，試一試 把 $u_n < u_{n-1}$ 以兩種方式代入 $nu_nu_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$，從而把 nu_n^2 夾在中間。然後以 $n+1$ 代替 n，應用其中一個不等式。

背後的數學

沃利斯乘積

把遞推公式一直用到 u_0 或 u_1，便得到明確的值：

$$u_{2m} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad u_{2m+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2m+1)}.$$

由夾逼可知 $u_{2m}/u_{2m+1} \to 1$。把這個比寫出來再整理，便得到沃利斯乘積

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty} \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdots\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}.$$

沃利斯在 1655 年以一種大膽的插值（interpolation）方法發現了它：他把 $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,dx$ 放進一個指數為整數的積分表中，從而猜出它「應該」是甚麼。這是數學史上最早的無窮乘積之一，僅次於韋達（Viète）的乘積（Section 2.5），也是第一個只用有理數的無窮乘積。

二分之一的階乘

沃利斯的插值想法，在 1729 年由歐拉（Euler）賦予了嚴格的意義。他找到一個函數，現稱為*伽瑪函數*（Gamma function），

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\,dt,$$

它滿足 $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$（用分部積分法），而且對整數 n 有 $\Gamma(n+1) = n!$。它把階乘（factorial）平滑地延拓至所有正實數。與它密切相關的*貝塔函數*（Beta function）

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

包含了 Section 4.3 和 Section 2.9 中的積分，而且經代換 $x = \sin^2 t$ 之後，也包含我們的 u_n。特別地，$\int_0^1 x^{1/2}(1-x)^{1/2}\,dx = \frac{\pi}{8}$（練習 2），由此得 $\Gamma(\frac{3}{2})^2/\Gamma(3) = \frac{\pi}{8}$，即 $\left(\frac{1}{2}\right)! = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$。等價地，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$，這與著名的高斯積分（Gaussian integral）$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ 是同一個事實，也正是 π 出現在正態分佈（normal distribution）公式中的原因。

斯特靈公式

斯特靈公式說 $n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$。其中 $(n/e)^n$ 的部分相對容易得到，但常數 $\sqrt{2\pi}$ 則較難，而求出它的標準方法正是本題：u_{2m} 的明確值涉及 $(2m)!/(m!)^2$，而極限 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ 則把這個常數確定下來。另有一條截然不同的途徑，通過概率得到同一個常數，見 Section 12.23。

延伸練習

1. **沃利斯乘積。**利用 u_{2m} 和 u_{2m+1} 的明確值，以及 $u_{2m+1} < u_{2m} < u_{2m-1}$，證明沃利斯乘積。

2. **一個貝塔積分。**試做 STEP II 2013，第 2 題（step.maths.org/questions/13-s2-q2）。這題用遞推公式計算 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,dx$，然後問當 $n = \frac{1}{2}$ 時答案有何啟示：這是對二分之一的階乘的初次一瞥。

3 **貝塔函數。**試做 STEP III 2025，第 1 題（載於 OCR 提供下載的 2025 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）。這題建立一般的貝塔積分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$、它的對稱性和一個遞推關係，並用它們計算一個在 $[0,\infty)$ 上的積分。

4 **中心二項式係數（central binomial coefficients）。**較難證明 $u_{2m} = \binom{2m}{m}\dfrac{\pi}{2^{2m+1}}$，並利用 $nu_n^2 \to \frac{\pi}{2}$ 推導出當 m 很大時 $\binom{2m}{m} \approx \dfrac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$。就 $m = 10$ 驗證這個結果。

延伸閱讀

- **Julian Havil, *Gamma***（Princeton University Press）。內容包括伽瑪函數及其歷史。
- **Philip J. Davis, “Leonhard Euler’s integral: a historical profile of the Gamma function”,** *American Mathematical Monthly* 66 (1959)。一篇獲獎的經典文章，讀過本節之後便能看懂。
- **Emil Artin, *The Gamma Function***（Dover）。一本簡短而優美的專著，適合學過一些分析之後閱讀。

完整的引導式解答見第 4.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/wallis-beta.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com