4.3 22/7 大於 π

工作紙

題目

STEP I 1997，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/97-s1-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 為甚麼 $\int_0^1 \frac{\text{多項式}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 會算出 π 來？這種形式的積分之中，哪一個簡單的積分本身就給出 π？

階段 1 多項式除法

涵蓋：除以 x^2+1 的運算

想一想 先展開 $x^4(1-x)^4$。

停一停，試一試 用長除法（long division），或由最高次項起比較係數（comparing coefficients），除以 x^2+1。餘式（remainder）是甚麼？

階段 2　積分

涵蓋：等於 $\frac{22}{7} - \pi$ 的積分

想一想　把你得到的恆等式（identity）除以 $1 + x^2$，然後由 0 至 1 逐項積分。哪一個積分會得出 π？

階段 3 估計積分的上下界

涵蓋：π 的上下界

想一想 被積函數（integrand）在 $(0,1)$ 上恆為正。由此可以即時得出甚麼結論？

停一停，試一試 在 $[0,1]$ 上，$\frac{1}{1+x^2}$ 最大可以是多少？最小又可以是多少？利用這一點求出積分的上下界（bounds），並計算 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x$。

背後的數學

一個有來歷的證明

阿基米德（Archimedes）約於公元前 250 年證明了 $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$，方法是計算圓內接和圓外切正 96 邊形的周界（可與 Section 2.5 中的多邊形比較）。積分證明則晚近得多。它由 D. P. Dalzell 於 1944 年發表，其後在 1968 年被選為美國大學本科生普特南數學競賽（Putnam competition）的題目，因而廣為人知。它的迷人之處在於完全不需要任何數值計算：不等式 $\frac{22}{7} > \pi$ 直接來自「正函數的積分為正」這個事實。

用同一思路得出更佳的近似值

這個方法可以推廣。以 $x^8(1-x)^8$ 取代 $x^4(1-x)^4$，同樣的除法給出

$$\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\pi - \frac{188684}{15015},$$

由此證明 $\pi > \frac{47171}{15015} = 3.1415917\ldots$，準確至六位有效數字（significant figures）。2009 年，Stephen Lucas 找到了多族這類被積函數非負的積分，它們能證明關於其他著名近似值的不等式，其中包括準確至七位有效數字的 $\frac{355}{113}$。

近似值與無理性

為甚麼 π 會有 $\frac{22}{7}$ 和 $\frac{355}{113}$ 這樣好的分數近似值？每個無理數（irrational number）都有無窮多個分數 $\frac{p}{q}$ 與它相距不超過 $\frac{1}{q^2}$，而 π 碰巧在很早的階段就有幾個特別好的，因為它的連分數（continued fraction）$[3;7,15,1,292,\ldots]$ 含有 292 這個很大的項（見 Section 2.2）。像本題這樣的積分，若令其愈來愈小，便是另一類證明的起點：這類證明指出某些數不可能被分數逼近得太好，因而是無理數。Ivan Niven 那個著名的、只有一頁的 π 是無理數的證明（1947 年），用的就是 $\frac{x^n(1-x)^n}{n!}\sin(\pi x)$ 的積分，它們是 Section 2.9 中那些積分的三角函數近親。

延伸練習

1. **核對數字。**計算 $\frac{22}{7} - \pi$ 至四位有效數字，並確認它介乎 $\frac{1}{1260}$ 與 $\frac{1}{630}$ 之間。

2. **一個 Beta 積分。**利用公式 $\int_0^1 x^n(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$（在 Section 4.4 中證明）驗證 $\int_0^1 x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630}$。

3. **一個偏小的近似值。**證明

$$\int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \quad \text{及} \quad \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi - \frac{47}{15},$$

   並由此推出 $\pi > 3$ 及 $\pi > \frac{47}{15}$。為甚麼這些近似值不及 $\frac{22}{7}$ 準確？

4. **更進一步。**較難驗證上文給出的 $\int_0^1 \frac{x^8(1-x)^8}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 的恆等式。（除法可以交給電腦代數系統去做；重點是看出餘式是 16，從而得出 4π。）

延伸閱讀

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。詳細講述阿基米德的多邊形方法，另有許多其他內容。

- **Stephen Lucas, "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands"**, *American Mathematical Monthly* 116 (2009)。篇幅短小，容易閱讀。
- **Ivan Niven, *Irrational Numbers*** (Mathematical Association of America)。收錄了 Niven 對 π 是無理數的證明。

完整的引導式解答見第 4.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/twenty-two-sevenths.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com