4.2 由一個積分建立三角學

工作紙

題目

STEP III 2017，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/17-s3-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　第 (i) 和第 (ii) 部分分別對應哪些三角恆等式（trigonometric identities）？(想想 $\arctan x + \arctan \frac{1}{x}$，以及 $\tan(A+B)$ 的公式。)

階段 1　**反射** $u \mapsto 1/u$

涵蓋：第 (i) 部分

停一停，試一試　在 $\mathrm{T}(x)$ 中代入 $u = 1/w$。被積函數（integrand）會變成甚麼？積分上下限（limits）又會怎樣？

階段 2 加法代換

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 用商法則（quotient rule）對 $v = \frac{u+a}{1-au}$ 求導。然後把 $1 + v^2$ 寫成單一分數，再作比較。

停一停，試一試 於是 $\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}$：這個代換（substitution）不會改變被積函數。它對 $\mathrm{T}(x)$ 的積分上下限有甚麼影響？

階段 3　另外兩個恆等式

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　使用第 (i) 部分兩次，把 $\mathrm{T}(x)$ 和 $\mathrm{T}(a)$ 換掉。然後重新命名：設 $y = 1/x$ 及 $b = 1/a$。條件 $x < 1/a$ 會變成甚麼？

階段 4 特殊值

涵蓋：第 (iii) 部分

停一停，試一試 求 $\mathrm{T}(\sqrt{3})$：在最後一個恆等式（identity）中選取 y 和 b，使 $\frac{y+b}{by-1}$ 剛好等於 y 本身。

想一想 求 $\mathrm{T}(\sqrt{2}-1)$：在加法恆等式中取 $x = a = \sqrt{2}-1$。$\frac{2x}{1-x^2}$ 等於甚麼？而第 (i) 部分又給出 $\mathrm{T}(1)$ 的甚麼結果？

背後的數學

建構初等函數

在嚴格的分析課程中，函數 exp、sin、cos 和 ln 不能隨便假設存在；它們必須被建構出來，其性質也必須加以證明。標準的做法有三種。你可以用冪級數（power series）來定義它們（$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$）。你可以把它們定義為微分方程（differential equation）的解，就如練習中那道 1986 年樣本試卷的題目（$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$、$\mathrm{f}(0) = 1$ 定義了 exp）。你也可以像這裏一樣，用積分來定義反函數（inverse function）：$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}u}{u}$ 和 $\arctan x =$

$\int_0^x \frac{du}{1+u^2}$，然後定義 $\pi = 2\int_0^\infty \frac{du}{1+u^2}$。每種做法各有所長，而證明它們全都給出相同的函數，是一道令人滿足的練習。試與 Section 3.8 的函數方程（functional equation）做法比較。

圓以外：橢圓積分

積分的做法可以推廣，而三角形的做法卻做不到。1718 年，Giulio Fagnano 研究雙紐線（lemniscate）這條 8 字形曲線的弧長（arc length），由此引出 $\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^4}}$，並找到一個能把弧長加倍的代換，正如我們的代換把 T 加倍一樣。歐拉（Euler）在 1751 年讀到 Fagnano 的著作，找出了完整的加法公式；這最終經由阿貝爾（Abel）和雅可比（Jacobi），發展成*橢圓函數*（elliptic functions）的理論：橢圓函數就是這類積分的反函數，它們之於雙紐線，正如 sin 和 cos 之於圓。我們在高斯（Gauss）關於算術幾何平均（AGM）的工作中（Section 2.6）遇過同一個積分。橢圓函數如今是數論的核心；Section 1.9 的橢圓曲線（elliptic curves）就是它們在幾何上的投影。

計算 π

加法恆等式也是計算 π 的那些最著名公式的基礎。舉例說，反覆運用它可以證明 $\mathrm{T}(1) = 4\mathrm{T}(\frac{1}{5}) - \mathrm{T}(\frac{1}{239})$，這就是 1706 年的梅欽公式（Machin's formula）；配合級數 $\mathrm{T}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$，它算出了 π 的 100 位數字，並在其後兩個半世紀一直是首選的方法。這是 Section 5.1 的主題。

延伸練習

1. **指數函數與餘弦。**試做 STEP II Specimen paper，第 6 題（step.maths.org/questions/spec-s2-q6）。這道題只憑指數函數和餘弦各自的微分方程，推導出它們的加法公式。（*提示*：對於餘弦，找出兩個理應為零的組合，並證明它們的平方和是常數。）

2. **反正弦。**試做 STEP III 2007，第 7 題（step.maths.org/questions/07-s3-q7）。這道題用處理本節積分的同一手法來處理反正弦（inverse sine），並以一個代換把兩者聯繫起來。

3. **一條早期的梅欽型公式。**利用加法恆等式證明 $\mathrm{T}(\frac{1}{2}) + \mathrm{T}(\frac{1}{3}) = \mathrm{T}(1) = \frac{1}{2}\mathrm{T}_\infty$。

4. T_∞ **是有限的。**證明對所有 $x \geq 1$ 都有 $\mathrm{T}(x) \leq 1 + \int_1^x \frac{du}{u^2} < 2$，解釋為甚麼當 $0 < x < 1$ 時同樣有 $\mathrm{T}(x) < 2$，並由單調收斂定理（monotone convergence theorem）（Section 2.2）推斷 T_∞ 存在。

延伸閱讀

- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。嚴格地建構初等函數，並討論各種不同的做法。
- **Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis***（McGraw-Hill）。即著名的「baby Rudin」；第 8 章的引言只用寥寥數頁，便優雅地由冪級數建構出 exp、sin 和 cos。程度較深。
- **Victor Prasolov & Yuri Solovyev, *Elliptic Functions and Elliptic Integrals***（American Mathematical Society）。想知道雙紐線通往何處，可讀此書。程度較深。

完整的引導式解答見第 4.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/trig-from-integral.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com