4.1 甚麼是積分？

工作紙

題目

STEP III 1989，第 10 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/89-s3-q10

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想 第 (iii) 部分的兩個和，都是闊度為 $\frac{a}{n}$ 的矩形的面積之和。對於遞增函數（increasing function）f，哪一個和低估了曲線下的面積，哪一個高估了？

階段 1 可以裂項相消的和

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 設 $P(r) = r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)$，即六個連續整數（consecutive integers）之積。計算 $P(r) - P(r-1)$：兩者有哪些共同的因子？

停一停，試一試 把你的結果由 $r = 1$ 加到 n。大部分的項都會互相抵消。然後比較 r^5 與 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)$。

階段 2　下界

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試**　改用一個向下數、以 r 結尾的連續整數之積，重複同樣的做法：$(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r$。由 $r=0$ 加到 $n-1$，並把每一項與 r^5 比較。為甚麼這個不等式（inequality）是嚴格的？

階段 3 積分

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 對於遞增函數（increasing function），兩個和之中哪一個低估了面積，哪一個高估了面積？

停一停，試一試 把 $\mathrm{f}(x) = x^5$ 的兩個和都用 $\sum r^5$ 表示，並運用第 (i) 及第 (ii) 部分的結果。當 $n \to \infty$ 時，這些上下界趨向甚麼？

背後的數學

黎曼的定義

把細長條加起來求面積的想法，可追溯至阿基米德（Archimedes）：他在公元前 250 年左右，正是用這個論證的一個版本求出拋物線下的面積。牛頓（Newton）和萊布尼茲（Leibniz）把積分變成微分的逆運算，其後一個半世紀，大多數人都是這樣理解積分的。1854 年，黎曼（Bernhard Riemann）提出了大學課程至今仍用作起點的定義：把 $[a, b]$ 分成許多小段，構作（闊度）$\times$（f 在該小段內某處的高度）之和；若小段不斷縮小時，所有這樣的和都趨向同一個極限，便說 f 可積（integrable）。本題的版本採用等

闊長條和左右端點，是一個適用於遞增函數的特殊情況；達布（Jean-Gaston Darboux）的「上和與下和」則把一般情況處理得乾淨利落。

並非每個函數都有積分

有了精確的定義，便可以問哪些函數可積。閉區間上的每個連續函數都可積，每個遞增函數也可積。但試考慮狄利克雷（Dirichlet）函數：若 x 是有理數，$\mathrm{f}(x) = 1$；若是無理數，則為 0。每一條長條無論多窄，都同時包含有理數和無理數，所以每個上和都是 1，每個下和都是 0。兩者永不一致，因此 $\int_0^1 \mathrm{f}$ 在黎曼的意義下並不存在。1902 年，勒貝格（Henri Lebesgue）發明了一種更強大的積分，能夠處理這個函數（它的勒貝格積分（Lebesgue integral）是 0），而且在取極限時表現好得多。勒貝格積分是現代概率論的基礎，你會在大學二年級或三年級遇上它。

離散微積分

第 1 階段的裂項相消，其實是喬裝了的微積分。「上升階乘」（rising factorial）$r(r+1)\cdots(r+k-1)$ 在求和之下的表現，與 x^k 在積分之下的表現完全一樣：求和令因子的數目增加一個，並除以新的因子數目，正如 $\int x^k\,\mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}$。和與積分、差分與導數之間的這種對應，稱為*有限差分演算*（calculus of finite differences），是計算和式的有力工具。

延伸練習

1. **把極限化為積分。**試做 STEP III 1999，第 3 題（step.maths.org/questions/99-s3-q3）。這道題把和的極限化為積分：在每個和式中，找出曲線下的矩形。

2. **阿基米德的拋物線。**利用 $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 和第 (iii) 部分的定義，證明 $\int_0^a x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3$。

3. **上升階乘。**證明對每個正整數 k，都有 $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} r(r+1)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)\cdots(n+k)}{k+1}$。

4. **準確的和。**利用恆等式 $r(r+1)(r+2)(r+3)(r+4) = r^5+10r^4+35r^3+50r^2+24r$，以及 $\sum r^k$ 在 $k \le 4$ 時的已知公式，求出 $\sum_{r=1}^{n} r^5$ 的準確值。

延伸閱讀

- **David Bressoud, *A Radical Approach to Lebesgue's Theory of Integration***（Cambridge University Press）。由黎曼積分走到勒貝格積分的故事，以逼出每一步發展的問題為

線索娓娓道來。

- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 13 章以上和與下和定義積分，與本節完全一樣。
- **Graham, Knuth & Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley）。第 2 章建立有限差分演算，並討論上升階乘和下降階乘。

完整的引導式解答見第 4.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch04/riemann.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com