3.9 創造一個新函數

工作紙

題目

STEP II 2021，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　「解」一條方程，究竟是甚麼意思？$x = \sqrt{2}$ 是 $x^2 = 2$ 的解，還是只不過是那個解的名字？

階段 1 曲線 $y = xe^x$

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 對 xe^x 求導。駐點（stationary point）在哪裏？它屬於哪一類？

想一想 當 $x \to +\infty$ 及 $x \to -\infty$ 時，xe^x 會怎樣？曲線在哪裏與坐標軸相交？

階段 2　反函數

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試　要有反函數（inverse function），f 在 $[a,\infty)$ 上必須是一對一（one-to-one）的。符合要求的最小 a 是甚麼？把曲線沿 $y = x$ 反射，繪出 $y = \mathrm{g}(x)$ 的草圖。

階段 3 四條方程

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 定義性質是 $g(z)\,e^{g(z)} = z$。在每一小題中，目標都是化成 (某式) $e^{(\text{同一式})} =$ (某數) 的形式。對於 (a)，兩邊乘以 e^x。

想一想 在 (b) 和 (c) 中，未知數以 $x \ln x$ 的形式出現。哪一個代換（substitution）可以把 $x \ln x$ 變成 ue^u 的形式？

停一停，試一試 記住 ue^u 的最小值。對於 (c)，$ue^u = -\frac{1}{3}$ 有多少個解？g 給出的是哪一個？對於 (d)，兩邊取指數，並設法令指數成為 x 的倍數。

階段 4　$x^x = 10$

涵蓋：第 (iv) 部分

> **想一想**　先取對數（logarithm），然後使用與 (b) 和 (c) 相同的代換。

背後的數學

歷史悠久、名字卻很新的函數

蘭伯特（Johann Heinrich Lambert）在 1758 年研究過這類方程，歐拉（Euler）在 1783 年作了進一步的研究。但這個函數一直沒有標準名稱，直到 1990 年代，電腦代數系統（computer algebra system）Maple 的開發者需要為它起一個名字。1996 年，Robert Corless、Gaston Gonnet、David Hare、David Jeffrey 和 Donald Knuth 發表了論文「On the Lambert W function」，匯集了它的性質和應用。這篇論文已被引用數千次，而 W 現已內置於大多數數學軟件之中。題目中的函數 g 是主分支（principal branch）W_0；圖 3.9.1（見網上該節的完整版）中的虛線，即給出 (c) 和 (d) 中第二個根的那條曲線，是另一個實分支 W_{-1}。

W 出現在哪裏

- **維恩位移定律（Wien's displacement law）。**熱的物體輻射最強的波長與其溫度成反比。當中的常數來自解方程 $5(1-e^{-x}) = x$，其正數解為 $x = 5 + W\left(-5e^{-5}\right) \approx 4.965$。這就是為甚麼約 5800 K 的太陽看起來是黃白色，而溫度較低的紅矮星看起來是紅色。
- **冪塔（power tower）。**無窮冪塔 $x^{x^{x^{\cdots}}}$ 在 $e^{-e} \le x \le e^{1/e}$ 時收斂（converge），其值為 $\dfrac{W(-\ln x)}{-\ln x}$。
- **人口與傳染病模型。**在最簡單的模型中，一場傳染病的最終規模，以及某些增長模型中達到指定人口所需的時間，都由 W 給出。

初等函數

W 真的是新函數嗎？還是可以用 exp、ln、根式和三角函數寫出來？它確實是新的：一條可追溯至 1830 年代劉維爾（Joseph Liouville）的定理表明，W 不是*初等函數*（elementary function）。同一套理論還表明，一些看似平平無奇的積分，例如 $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$，無法用初等函數表示，這就是為甚麼正態分佈（normal distribution）需要自己專用的特殊函數。

延伸練習

1 **二、四，還有一個。**方程 $x^2 = 2^x$ 有顯而易見的解 $x = 2$ 和 $x = 4$（比較 Section 3.5）。證明它還有一個負數解，而這個解是

$$x = -\frac{2}{\ln 2}\,\mathrm{g}\left(\frac{\ln 2}{2}\right) \approx -0.767.$$

2 **一個導數。**對 $\mathrm{g}(x)e^{\mathrm{g}(x)} = x$ 作隱函數微分（implicit differentiation），證明當 $x \neq 0$ 時，

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{x\big(1 + \mathrm{g}(x)\big)}.$$

在 $x = -\frac{1}{e}$ 處會怎樣？

3 **一個積分。**利用代換 $x = we^w$ 證明 $\displaystyle\int_0^e \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = e - 1$。

4 **冪塔。**假設冪塔 $T = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}}$ 收斂，證明 $T = \sqrt{2}^{T}$，並由此推出 $T = 2$ 或 $T = 4$。究竟是哪一個？（計算數列 $t_1 = \sqrt{2}$、$t_{n+1} = \sqrt{2}^{t_n}$ 的頭幾項，並想想 Section 2.2 中的蛛網圖（cobweb diagram）。）

延伸閱讀

- **Robert Corless et al., "On the Lambert W function"**，*Advances in Computational Mathematics* 5 (1996)。為這個函數命名的論文。讀完本節之後，論文的頭幾節應可讀懂。
- **Brian Hayes, "Why W?"**，*American Scientist* 93 (2005)。一篇生動的文章，講述這個函數的歷史和用途。可在網上免費閱讀。
- **Brian Conrad, "Impossibility theorems for elementary integration"**。網上可找到的講義，解釋劉維爾的理論。程度較深。

完整的引導式解答見第 3.9 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/lambert-w.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com