3.8 由加法公式決定的函數

工作紙

題目

STEP III 2019，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2019 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696590-2019-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　這條方程對所有 x 和 y 都成立。最值得首先嘗試的是甚麼？

階段 1 在零處的值

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 這條等式對所有 x 和 y 都成立。代入 $x = y = 0$。$\mathrm{f}(0)$ 可能取哪些值？

停一停，試一試 假如 $\mathrm{f}(0) = 0$，會出現甚麼問題？代入 $y = 0$。

階段 2　由零處的導數（derivative）得出各處的導數

涵蓋：第 (i) 部分

> **停一停，試一試**　在 $\mathrm{f}'(x)$ 的定義中，寫成 $\mathrm{f}(x+h) = \mathrm{f}(x)\mathrm{f}(h)$。哪一部分可以抽到極限（limit）之外？餘下的極限又是甚麼？

階段 3　解 $\mathrm{f}' = k\mathrm{f}$

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　考慮 $\mathrm{f}(x)\,e^{-kx}$。它的導數是甚麼？

階段 4　第二條法則

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　在 g 的法則中代入 $y = 0$。由此可知 $\mathrm{g}(0)$ 有甚麼性質？$|\mathrm{g}(x)| < 1$ 這個條件在哪裏派上用場？

停一停，試一試　利用該法則把 $\mathrm{g}(x+h) - \mathrm{g}(x)$ 寫成單一分數，化簡後除以 h，再令 $h \to 0$。

階段 5　求解

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試**　分離變數（separate the variables）。當 $|g| < 1$ 時，哪個函數的導數是 $\frac{1}{1-g^2}$？

背後的數學

相對論中的速度

在日常生活中，如果一列火車以速率 u 行駛，而你在車廂內以速率 v 向前走，你相對於地面的速率就是 $u + v$。愛因斯坦在 1905 年證明這只是一個近似。正確的法則（其中 c 為光速）是

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + uv/c^2}.$$

若以 c 的分數來量度速率，這正是 g 的規則。我們的結果說明，如果把每個速度寫成 $v = \tanh \phi$，那麼速度的合成就是把各個 ϕ 相加。$\phi = \operatorname{artanh} v$ 這個量稱為快度（rapidity）。火箭引擎每次推進都會增加固定份量的快度，但由於對每個 ϕ 都有 $\tanh \phi < 1$，速度只會愈來愈接近光速，卻永遠達不到（圖 3.8.1）。把 $0.9c$ 與 $0.9c$ 合成，得到的不是 $1.8c$，而是 $\frac{1.8}{1.81}c \approx 0.9945c$。

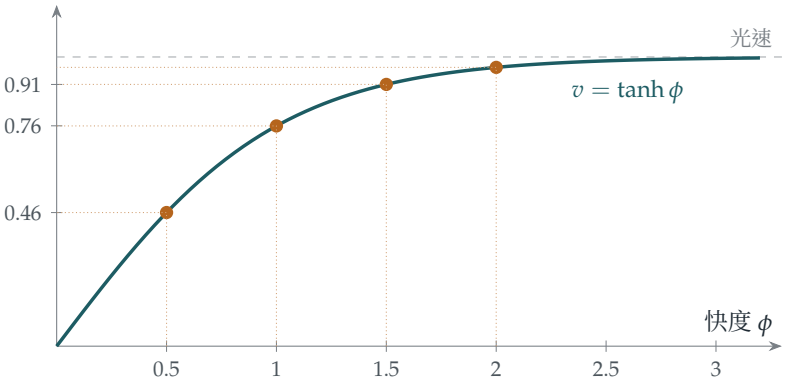

圖 3.8.1　速度（以光速的分數表示）對快度的圖像。快度每次增加相同的份量（引擎每次相同的推進所提供的正是這樣），速度的增幅卻愈來愈小：0.46、0.76、0.91、0.96、...，永遠達不到 1。

柯西函數方程

最簡單的函數方程是 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，柯西（Cauchy）在 1821 年研究過它。如果 f 可微，用本題的方法可證明 $f(x) = kx$。事實上只要連續就夠了。但若完全不作任何正則性（regularity）假設，就會有其他極其怪異的解，它們的圖像稠密地散佈在整個平面上。Georg Hamel 在 1905 年構造出這些解；這個構造需要用到選擇公理（axiom of choice），而且不可能把其中任何一個明確地寫出來。這就是題目堅持 f 可微的原因之一：這個假設並非例行公事。

同態

$f(x+y) = f(x)f(y)$ 的意思是，f 把實數的加法變成正實數的乘法，並且保持兩者的結構。用大學一年級代數的語言來說，f 是由 $(\mathbb{R}, +)$ 到 $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$ 的羣同態（group homomorphism），而對數就是它的反函數。數學中許多最重要的函數，都是這樣由它們所保持的結構來刻劃的。在 Section 7.6 中，我們會看到 tanh 的幾何意義：它量度的是「雙曲角」（hyperbolic angle），而它的加法定律來自雙曲旋轉的複合。

延伸練習

1 **正切的規則。**設 g 可微，$g'(0) = k \neq 0$，且只要等式兩邊都有定義，就有 $g(x+y) = \dfrac{g(x)+g(y)}{1-g(x)g(y)}$。證明 $g'(x) = k\big(1+g(x)^2\big)$，並由此推出在 $x = 0$ 附近 $g(x) = \tan kx$。

2 **柯西方程。**若 f 可微，且對所有 x、y 都有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，證明 $f(x) = kx$。

3 **不用導數。**較難只假設 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 及 $f(1) = a > 0$。證明對正整數 n 有 $f(n) = a^n$，然後證明 $f(1/n) = a^{1/n}$，再證明對每個正有理數 q 都有 $f(q) = a^q$。（為甚麼要再進一步就需要連續性？）

4 **火箭科學。**一枚火箭每次點火，都能相對於它當時所處的參考系把速率增加 $0.5c$。由靜止開始，經過 2、3 和 4 次點火後，它（相對於起點）的速率是多少？請使用快度。

延伸閱讀

- **Christopher Small, *Functional Equations and How to Solve Them***（Springer）。一本淺白易讀的函數方程入門書，以喜歡解題的讀者為對象。
- **Edwin Taylor & John Wheeler, *Spacetime Physics***（W. H. Freeman）。狹義相對論的經典入門書，全書都使用快度。
- **Tom Körner, *Calculus for the Ambitious***（Cambridge University Press）。由指數函數和三角函數的性質出發來定義它們，與本節的精神完全一致。

完整的引導式解答見第 3.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/addition-laws.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com