3.7 $\pi^2 \leq 10$

工作紙

題目

STEP II 2014，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s2-q2

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　一個在 $[0, \pi]$ 兩端都為零的函數，如果在中間取值很大，為甚麼就必須很陡？條件 $\mathrm{f}(0) = \mathrm{f}(\pi) = 0$ 為甚麼重要？

階段 1　正弦波（sine wave）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ 和 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$，求出 $\int_0^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\pi} \cos^2 nx \,\mathrm{d}x$。

階段 2 端點條件（end conditions）很重要

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 找一個滿足 $f(0) \neq 0$ 而令 $(*)$ 不成立的簡單函數。然後再找一個滿足 $f(0) = 0$ 但 $f(\pi) \neq 0$ 的例子。

階段 3　一條拋物線（parabola）

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　哪一個二次函數（quadratic）在 $x = 0$ 和 $x = \pi$ 處的值為零？為甚麼乘上一個常數倍並無影響？

停一停，試一試　對 $\mathrm{f}(x) = x(\pi - x)$ 求出兩個積分。代換（substitution）$u = x - \frac{\pi}{2}$ 可令兩個被積函數（integrand）都變成偶函數（even function）。

階段 4 一個三角函數的選擇

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 $\mathrm{f}(0) = 0$ 和 $\mathrm{f}(\pi) = 0$ 對 p、q、r 施加了甚麼條件？

停一停，試一試 求出 $\int_0^\pi \mathrm{f}^2$ 和 $\int_0^\pi (\mathrm{f}')^2$。留意 $\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 = 1 + \sin x$，這會很有幫助。由此可得出關於 π 的甚麼不等式？

階段 5　哪一個較好？

涵蓋：第 (ii) 部分

> **想一想**　把你所得的 π 的界（bound）平方，再與由拋物線得出的界作比較。

背後的數學

用傅立葉級數的證明

為甚麼 $(*)$ 成立？到了大學你會學到，$[0,\pi]$ 上任何在兩端都為零的合理函數，都可以寫成傅立葉正弦級數（Fourier sine series）：

$$\mathrm{f}(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots .$$

由於當 $m \neq n$ 時 $\int_0^\pi \sin mx \sin nx \,\mathrm{d}x = 0$，平方後再積分，所有交叉項都會消失，得出

$$\int_0^\pi \mathrm{f}^2 = \frac{\pi}{2}\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots\right), \qquad \int_0^\pi (\mathrm{f}')^2 = \frac{\pi}{2}\left(1^2 b_1^2 + 2^2 b_2^2 + 3^2 b_3^2 + \cdots\right).$$

右式的每一項都不小於左式的對應項，這就證明了 $(*)$，同時說明等號只在 f 是 $\sin x$ 的倍數時成立。題目的第 (i) 部分就是只有一項的情況。

振動的弦與量子粒子

比值 $\int (\mathrm{f}')^2 / \int \mathrm{f}^2$ 稱為瑞利商（Rayleigh quotient），而 $(*)$ 說的是：對於固定在 0 和 π 的函數，它的最小可能值是 1。這個數有物理意義。對一條兩端固定的弦來說，$\int (\mathrm{f}')^2$ 量度拉伸的能量，$\int \mathrm{f}^2$ 量度位移的大小，而這個比值的最小值決定了弦所能奏出的最低音。在量子力學（quantum mechanics）中，同一個最小值就是困在盒子裏的粒子的最低能量：它不可能是零，因為兩端固定的波必須彎曲。瑞利勳爵（Lord Rayleigh）正是用這一招——猜一個測試函數，再計算比值——來估計振動系統的頻率；由於極端情況給出最小值，任何猜測都會給出真正最低頻率的一個上界，而好的猜測更會給出非常準確

的上界。

變分法

找出令某個積分之比取得最小值的函數，是*變分法*（calculus of variations）的問題，當中的未知量是整個函數，而不是一個數。這裏取得最小值的函數 $\sin x$ 滿足微分方程（differential equation）$f'' + f = 0$，而這並非巧合：求積分的最小值，總會導出一條由取得最小值的函數所滿足的微分方程。我們會在 Section 4.7 再談這個想法。

延伸練習

1 **四次函數。**在 $(*)$ 中取 $f(x) = x^2(\pi - x)^2$。證明它只能給出 $\pi^2 \le 12$。為甚麼這個測試函數比拋物線差？（把它的形狀與 $\sin x$ 比較。）

2 **兩個正弦波。**對 $f(x) = \sin x + \sin 2x$ 直接驗證 $(*)$，把兩邊都計算出來。

3 **另一個區間。**用代換證明：若 $g(0) = g(L) = 0$，則 $\displaystyle\int_0^L g^2 \le \frac{L^2}{\pi^2}\int_0^L (g')^2$。這對不同長度的弦說明了甚麼？

4 **瑞利法。**較難取 $f(x) = x(\pi - x) + \lambda x^2(\pi - x)^2$，並選取 λ 使 π^2 的界盡可能好。（代數運算相當繁重，用電腦代數系統會有幫助。）

延伸閱讀

- **T. W. Körner, *Fourier Analysis***（Cambridge University Press）。一本精彩而旁徵博引的書，講述傅立葉級數及其應用，作者是劍橋的分析學家。
- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。第 7 章討論 Wirtinger 不等式及相關的不等式。
- **Richard Feynman, *The Feynman Lectures on Physics***，第 II 卷第 19 章（「The principle of least action」，最小作用量原理）。費曼（Feynman）關於求積分最小值的一講，通篇貫穿物理直覺。可於網上免費閱讀。

完整的引導式解答見第 3.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/wirtinger.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com