3.6 斜率的界

工作紙

題目

STEP I 1988，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/88-s1-q7

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　$\mathrm{f}'(x)$ 的公式只用到 f 的三個值：在 -1、0 和 1 的值。為甚麼三個值就足以確定一個二次函數的導數（derivative）？

階段 1　公式

涵蓋：$\mathrm{f}'(x)$ 的公式

> **想一想**　把 $\mathrm{f}(1)$、$\mathrm{f}(-1)$ 和 $\mathrm{f}(0)$ 用 a、b、c 表示，代入後按 x 的冪次整理。

階段 2 上界

涵蓋：$|f'(x)| \le 4$

想一想 對公式取絕對值，並運用三角不等式（triangle inequality），其中 $|f(1)|$, $|f(-1)|$, $|f(0)| \le 1$。這樣得到的 $|f'(x)|$ 的上界（bound）是 x 的甚麼函數？

停一停，試一試 按各項的正負號分情況討論，證明當 $|x| \le 1$ 時，$\left|x+\frac{1}{2}\right| + \left|x-\frac{1}{2}\right| + 2|x| \le 4$。

階段 3　極端例子

涵蓋：等號成立的情況

> **停一停，試一試**　要在 $x = 1$ 處達到這個上界，每一個不等式都必須取等號。$f(1)$、$f(-1)$ 和 $f(0)$ 必須取甚麼值？求出通過這些點的二次函數（quadratic）。

背後的數學

馬可夫不等式與切比雪夫多項式

馬可夫在 1889 年證明：若 p 是 n 次多項式，且在 $[-1, 1]$ 上 $|p(x)| \le 1$，則

$$|p'(x)| \le n^2 \qquad \text{當} |x| \le 1.$$

當 $n = 2$ 時，這就是我們的上界 4。極端情況是*切比雪夫多項式*（Chebyshev polynomials）T_n，其定義為

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

例如 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 給出 $T_2(x) = 2x^2 - 1$，即我們的極端二次函數；而 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 給出 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$。由於 $T_n(x) = \cos n\theta$，這些多項式在 -1 與 1 之間來回振盪的次數，已是 n 次多項式所能做到的最多，而且它們在兩端也是最陡的（圖 3.6.1）。馬可夫的弟弟 Vladimir 在 1892 年把結果推廣到高階導數。

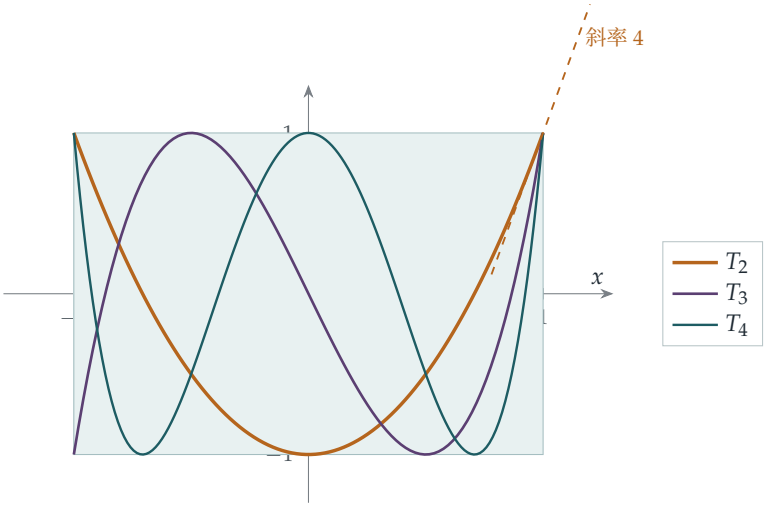

圖 3.6.1 切比雪夫多項式 $T_2 = 2x^2 - 1$、$T_3 = 4x^3 - 3x$ 和 $T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1$ 都留在方框 $|x| \le 1$、$|y| \le 1$ 之內，並且盡可能多次觸及方框的頂邊和底邊。在同次數的多項式中，它們在兩端最陡：$T_n'(1) = n^2$。虛線是 T_2 在 $x = 1$ 處的切線，斜率為 4。

插值

題目中的公式是拉格朗日插值（Lagrange interpolation）的一個例子：已知函數在若干點的值，寫出通過這些點而次數最低的唯一多項式，再用它來逼近該函數或其導數。這裏的三個點是 $-1, 0, 1$。這類公式在數值分析（numerical analysis）中無處不在，例如用來從量度所得的數據估計導數。馬可夫不等式就是隨之而來的警告：函數值的小誤差，在導數中最多可以被放大 n^2 倍，這正是門捷列夫當年擔心的問題。

切比雪夫多項式的實際應用

切比雪夫多項式是逼近理論（approximation theory）的主力工具。在 T_n 的根處對函數插值，而不是在等距的點上插值，可以把誤差控制住；若用等距的點，高次插值在區間兩端附近可以錯得非常離譜（龍格現象，Runge's phenomenon）。那些把函數計算至機器精度極限、或以極高準確度求解微分方程（differential equation）的軟件，內部往往使用切比雪夫展開式。

延伸練習

1 **一般的想法。**證明若 f 是二次函數，則 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(-1)\dfrac{x(x-1)}{2} + \mathrm{f}(0)(1-x^2) + \mathrm{f}(1)\dfrac{x(x+1)}{2}$，然後求導，重新得出題目中的公式。

2 **唯一性。**較難證明在 $[-1,1]$ 上滿足 $|\mathrm{f}(x)| \le 1$、且在 $[-1,1]$ 內某處有 $|\mathrm{f}'(x)| = 4$ 的二次函數，只有 $\pm(2x^2-1)$。

3 **切比雪夫多項式。**利用 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 驗證 $T_3(x) = 4x^3 - 3x$，並驗證 $T_3'(1) = 9$。證明 $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$，並求 T_4。

4 **T_n 的斜率。**把 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ 對 θ 求導，證明 $T_n'(\cos\theta) = \dfrac{n\sin n\theta}{\sin\theta}$，再令 $\theta \to 0$，推導出 $T_n'(1) = n^2$。

延伸閱讀

- **Lloyd N. Trefethen, *Approximation Theory and Approximation Practice***（SIAM）。一本出色的現代著作，講述切比雪夫多項式與插值，能力強的中學生也讀得懂，全書穿插電腦實驗。
- **Peter Borwein & Tamás Erdélyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities***（Springer）。想了解馬可夫不等式及其相關結果的來龍去脈，可讀此書。程度較深。
- **George M. Phillips, *Interpolation and Approximation by Polynomials***（Springer）。一本大學本科教科書，涵蓋拉格朗日插值、切比雪夫多項式和馬可夫型不等式。

完整的引導式解答見第 3.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/markov-bound.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com