3.5 π^e 還是 e^π？

工作紙

題目

STEP II 2013，第 1 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s2-q1

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　取對數（logarithm）後，$a^b = b^a$ 等同於 $b\ln a = a\ln b$。試把這條式重新整理，使 a 只出現在一邊，b 只出現在另一邊。

階段 1 過原點的切線（tangent）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 若 $y = mx$ 與 $y = \ln x$ 在 $x = x_0$ 處相切，必須滿足哪兩條方程？

停一停，試一試 若 $y = mx$ 與曲線相交於 $x = a$ 和 $x = b$，試以 m 表示 $\ln a$ 和 $\ln b$。消去 m，然後兩邊取指數（exponentiate）。

階段 2　在原點上方與 y 軸相交的直線

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試　此時 $\ln p = mp + c$ 且 $\ln q = mq + c$，其中 $c > 0$。以 m 和 c 表示 $\frac{\ln p}{p}$ 和 $\frac{\ln q}{q}$，然後比較兩者。

階段 3　e 右方的弦（chord）

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　由 $(p, \ln p)$ 至 $(q, \ln q)$ 的弦（其中 $e \le p < q$）不及曲線在 p 處那麼陡峭。為甚麼？由此可知這條弦的 y 軸截距（intercept）有何特點？

停一停，試一試　把這個結果連同第 (ii) 部分一併應用於 $p = e$ 和 $q = \pi$。

階段 4　與切線平行的弦

涵蓋：第 (iv) 部分

> **停一停，試一試**　這條弦與切線 $y = \frac{x}{e}$ 平行，而曲線位於該切線下方。這條弦與 y 軸相交於原點上方還是下方？然後把 c 的正負號倒轉，重做第 (ii) 部分。

背後的數學

$\frac{\ln x}{x}$ 的圖像

本題的一切，都可以在 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的圖像中看到（圖 3.5.1）。它的導數（derivative）是 $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$，所以 h 在 $(0, e)$ 上遞增，在 $x = e$ 處達到最大值（maximum）$\frac{1}{e}$，然後遞減並趨向 0。一條高度為 m 的水平線，若高度介乎 0 與 $\frac{1}{e}$ 之間，便會與圖像相交兩次，交點為 $a < e < b$，且 $h(a) = h(b)$，這正正就是 $a^b = b^a$。在 e 的右方，h 遞減，所以當 $e \le p < q$ 時，我們有 $h(p) > h(q)$，即 $p^q > q^p$。特別地，$e^\pi > \pi^e$；更一般而言，對每個 $x \neq e$ 都有 $e^x > x^e$：在這場較量中，沒有其他數能勝過 e。

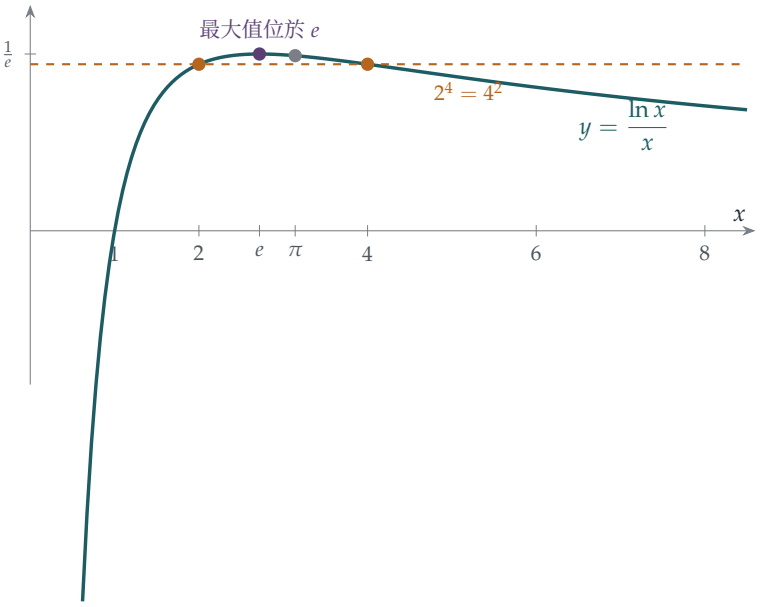

圖 3.5.1 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的圖像。它上升至 $x = e$ 處的最大值 $\frac{1}{e}$，然後下降。因為 $h(e) > h(\pi)$，所以 $e^\pi > \pi^e$。高度為 $\frac{\ln 2}{2}$ 的水平線（琥珀色）與圖像相交於 $x = 2$ 和 $x = 4$：這是唯一一對滿足 $n^m = m^n$ 的相異整數。

$x^y = y^x$ 的所有解

哪些相異的正實數對滿足 $x^y = y^x$？有一個巧妙的方法可以把它們全部找出來。設 $y = tx$，其中 $t > 1$；那麼 $x^{tx} = (tx)^x$ 給出 $x^t = tx$，所以 $x^{t-1} = t$，並且

$$x = t^{1/(t-1)}, \qquad y = t^{t/(t-1)}.$$

寫成 $t = 1 + \frac{1}{n}$，便得 $x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 及 $y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$。取 $n = 1$ 時，這就是 $(2, 4)$；取 $n = 2$ 時則是 $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$，而的確有 $\left(\frac{9}{4}\right)^{27/8} = \left(\frac{27}{8}\right)^{9/4}$。當 $n \to \infty$ 時，兩者都趨向 e，也就是兩個分支會合之處。1728 年，丹尼爾·伯努利（Daniel Bernoulli）與哥德巴赫（Christian Goldbach）曾在書信中討論這個問題，其後歐拉（Euler）亦有研究。

最經濟的底

函數 $x^{1/x} = e^{h(x)}$ 同樣在 $x = e$ 處取得最大值。這解答了一個有趣的問題：假如一個記數系統的「成本」是它的底（base）乘以所需的數位數目，那麼最經濟的底就是 e；若只考慮整數，則是 3（僅僅勝過 2）。有少數實驗性質的電腦採用過以 3 為底的記數法，例如 1958 年蘇聯的 Setun。

延伸練習

1 **整數。**試做 STEP I 1988，第 1 題（step.maths.org/questions/88-s1-q1）。

2 **更多比較。**試做 STEP II 2025，第 3 題（載於 OCR 提供下載的 2025 年試卷，www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip）。該題利用本節的圖像，解決更多 a^b 與 b^a 之間的比較，其中一個要靠 e 的數值界限才能完成。

3 **一行證明。**利用當 $x \neq 0$ 時 $e^x > 1 + x$，並取 $x = \frac{\pi}{e} - 1$，直接證明 $e^\pi > \pi^e$。

延伸閱讀

- **Eli Maor, *e: The Story of a Number***（Princeton University Press）。講述 e 的歷史，包括方程 $x^y = y^x$。
- **Paul Nahin, *An Imaginary Tale***（Princeton University Press）。不只談 $\sqrt{-1}$：書中滿載正是這一類的有趣計算。
- **Michael Spivak, *Calculus***（Cambridge University Press）。第 11 章以完全嚴謹的方式，講解如何運用導數了解圖像的形狀。

完整的引導式解答見第 3.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/pi-e-or-e-pi.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com