3.4 以面積證明不等式

工作紙

題目

STEP III 2011，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/11-s3-q4

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲線與 x 軸之間的面積。在同一幅圖上，$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 代表哪一塊面積？

階段 1 圖像

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 $\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲線與 x 軸之間的面積。在同一幅圖上，$\int_0^b \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 代表哪一塊面積？

停一停，試一試 畫出以 $(0,0)$ 和 (a,b) 為頂點的長方形，並把兩個區域都塗上陰影。它們是否蓋滿整個長方形？甚麼時候沒有多出來的部分？

階段 2　楊氏不等式（Young's inequality）

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　取 $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$，$\mathrm{f}^{-1}(y)$ 是甚麼？把兩個積分都計算出來。

停一停，試一試　利用 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 化簡第二個積分。至於等號何時成立，可利用你在第 (i) 部分的答案。

階段 3 反正弦

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上取 $f(x) = \sin x \circ \arcsin y$ 該怎樣積分？試把它看成 $\arcsin y \times 1$，用分部積分法（integration by parts）。

停一停，試一試 要推導出關於 $\arcsin(t^{-1})$ 的不等式，選取最簡單的 a 值，並設 $b = \frac{1}{t}$。

背後的數學

從楊氏到赫爾德

楊（William Henry Young）在 1912 年發表他的不等式。它之所以重要，在於它所引出的結果。假設 $\sum a_i^p = 1$ 及 $\sum b_i^q = 1$。對每一對數應用楊氏不等式，然後相加，

$$\sum a_i b_i \le \frac{\sum a_i^p}{p} + \frac{\sum b_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

把各個 a 和各個 b 按比例縮放，使兩個和都等於 1，就得到**赫爾德不等式**：對正數，

$$\sum a_i b_i \le \left(\sum a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum b_i^q\right)^{1/q}.$$

取 $p=q=2$，這就是**柯西—施瓦茲不等式** $\sum a_i b_i \le \sqrt{\sum a_i^2}\sqrt{\sum b_i^2}$，它說的是兩個向量夾角的餘弦最多為 1。赫爾德不等式是 L^p 空間理論的基礎；在這些函數空間裏，「距離」是用 $(\int |f|^p)^{1/p}$ 來量度的，你會在泛函分析（functional analysis）和概率的課程中遇到它們。

勒讓德變換

圖 3.4.1（見網上該節的完整版）對 f 和 f^{-1} 的處理完全對稱。記 $F(a)=\int_0^a \mathrm{f}$ 及 $G(b)=\int_0^b \mathrm{f}^{-1}$。不等式說的是 $F(a)+G(b)\ge ab$，在曲線上等號成立，所以

$$G(b)=\max_a\,(ab-F(a)).$$

這個把凸函數（convex function）F 變成另一個凸函數 G 的運算，就是**勒讓德變換**，而連續做兩次就會回到 F。在力學中，它把**拉格朗日量**（Lagrangian，位置與速度的函數）轉換成**哈密頓量**（Hamiltonian，位置與動量的函數）：這是牛頓（Newton）定律的兩種等價表述，你會在大學二年級的課程中學到。在熱力學中，它在能量、焓（enthalpy）和自由能（free energy）之間互相轉換。對 $F(a)=a^p/p$，變換的結果是 $G(b)=b^q/q$，這就是楊氏不等式中兩個指數由 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 聯繫起來的原因。

延伸練習

1. **1987 年的版本。**試做 STEP I 1987，第 6 題（step.maths.org/questions/87-s1-q6）。它用同一類圖來求反函數的積分。用求導來驗算你的答案。

2. **柯西–施瓦茲。**用 $p=q=2$ 的楊氏不等式，證明對正數有 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$。（提示：先處理兩個平方根都等於 1 的情況。）

3. **指數版本。**在 $(*)$ 中取 $\mathrm{f}(x)=e^x-1$，證明對 $a,b\ge 0$，

   $$ab \le e^a-1-a+(1+b)\ln(1+b)-b.$$

   等號何時成立？

4. **這個界有多好？**較難用計算機比較 $t=1,2,10$ 時的 $\arcsin(1/t)$ 與 $t-\sqrt{t^2-1}$。證明當 t 很大時，$t-\sqrt{t^2-1}\approx\frac{1}{2t}$，而 $\arcsin(1/t)\approx\frac{1}{t}$。為甚麼這個界相差了一個因子 2？（看看 $a=0$ 時的圖：多出來的部分有多少被浪費了？）

延伸閱讀

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第 1 章和第 9 章講述柯西–施瓦茲不等式和赫爾德不等式，途中也談到楊氏不等式。
- **Roger Nelsen, *Proofs Without Words***（Mathematical Association of America）。收錄了楊氏不等式和許多其他的圖形證明。
- **V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics***（Springer）。第 14 節正是用這幅圖來解釋勒讓德變換。內容較深，但相關的一節很短。

完整的引導式解答見第 3.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/areas-inequalities.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com