3.3 凸性的威力

工作紙

題目

STEP II 2007，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/07-s2-q7

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

? **想一想**　畫一條向下彎的曲線，例如 $(0, \pi)$ 上的 $y = \sin x$。在曲線上標出兩點，並用直線把它們連起來。這條弦在曲線之上還是之下？

階段 1　檢驗凹性（concavity）

涵蓋：第一部分

? **想一想**　求 $\sin x$ 和 $\ln x$ 的二階導數（second derivative）。它們在所給區間上的正負號是甚麼？

階段 2 三角形

涵蓋：第 (i) 部分

> **停一停，試一試** 對 $\mathrm{f}(x) = \sin x$ 和三個角 A、B、C 使用延森不等式（Jensen's inequality）。這三個角是否位於 sin 為凹函數（concave function）的區間之內？它們的平均值是多少？

階段 3 一行證明算術幾何平均不等式（AM–GM）

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** AM–GM 不等式比較的是積與和。哪一個凹函數能把積化為和？對它使用延森不等式。

階段 4　運用 AM–GM 不等式

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　第一個不等式：左方有四項，右方是三個變數的積。對四個數使用 AM–GM 不等式。為甚麼 16 會有幫助？

停一停，試一試　求最小值：你想得到 $x^5y^5z^5$ 的五次方根，所以要用五個數。另外兩個數應該是甚麼？等號何時成立？

背後的數學

凸函數

在大學裏，凸函數（convex function，即把凹函數上下倒轉）的標準定義完全不涉及導數：若

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le t\,f(x_1) + (1-t)\,f(x_2) \qquad \text{對所有} x_1, x_2 \text{及} 0 \le t \le 1,$$

則稱 f 為凸函數，這正正是說弦位於曲線之上。這個定義對不可微（not differentiable）的函數（例如 $|x|$）以及多元函數同樣適用。丹麥工程師兼數學家琴生（Johan Jensen）

在 1906 年提出了以他命名的不等式，使凸函數成為一門獨立的學問。

無處不在的凸性

凸性在數學及其應用中隨處可見。

- **概率。**琴生不等式指出，對於凹函數 f 和任意隨機變量（random variable）X，有 $\mathrm{E}[\mathrm{f}(X)] \leq \mathrm{f}(\mathrm{E}[X])$。在經濟學中，若以 f 為一個凹的「效用」（utility）函數，這就解釋了為何人們寧願穩拿 £100，也不願參與一場各有一半機會得到 £0 或 £200 的賭局，亦解釋了為何會有保險。
- **信息論。**均勻分佈（uniform distribution）使熵（entropy）達到最大，這個結果是數據壓縮的基礎，而它的證明就是 ln 的琴生不等式。
- **優化。**凸函數除了全局最小值之外，再沒有其他局部極小值（local minima），所以「一直往下坡走」總能找到最佳答案。這就是凸優化問題能夠有效率地求解的原因，也是人們花那麼多工夫把問題改寫成凸形式的原因。

在 Section 3.4 中，我們會看到凸性的另一面：函數與其反函數（inverse）之間的一種幾何對偶（duality）。

延伸練習

1. **定義。**STEP II 2018，第 2 題（step.maths.org/questions/18-s2-q2）的第 (i) 及 (ii) 部分由上面方框中以弦刻劃凹性的定義出發，逐步建立三個點的琴生不等式。
2. **正弦之積。**試做 STEP II 2018，第 2 題（step.maths.org/questions/18-s2-q2）的第 (iii) 部分。
3. **銳角三角形。**證明 $\tan x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是凸的，並由此推出在銳角三角形(acute-angled triangle）中，$\tan A + \tan B + \tan C \geq 3\sqrt{3}$。
4. **冪平均。**證明 x^2 是凸的，並由此推出 $\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$。試把這個結果詮釋為關於一組數的方差（variance）的命題。

延伸閱讀

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class***（Cambridge University Press）。第 6 章講述凸性和琴生不等式。
- **Claudi Alsina & Roger Nelsen, *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities***（Math-

ematical Association of America）。以圖形證明不等式，當中不少用到凸性。

- **Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization***（Cambridge University Press）。一部現代經典，可在網上免費閱讀；開首幾章說明凸性在實際應用中為何重要。

完整的引導式解答見第 3.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/convexity.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com