3.2 倒過來的 AM–GM

工作紙

題目

STEP II 1993，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s2-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　為甚麼由 2^m 個數走到 2^{m+1} 個數，可能比由 n 走到 $n+1$ 容易？

階段 1　兩個數

涵蓋：兩個數的情形

想一想　展開 $\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2$，並把它寫成一個平方。

階段 2 倍增

涵蓋：對 m 使用歸納法（induction）

想一想 把這 2^{m+1} 個數分成前半和後半兩組。設 P 和 Q 分別為兩組的算術平均（arithmetic mean）。歸納假設（inductive hypothesis）對每一組說明了甚麼？

停一停，試一試 把兩個結果相乘，然後對 P 和 Q 使用兩個數的情形。$\frac{P+Q}{2}$ 是甚麼？

階段 3　填補空隙

涵蓋：任意項數

想一想　網上試題庫收錄的這份試卷有一處誤植：$b_1 = a_2$ 應為 $b_1 = a_1$。補齊後的數列 $b_1, \dots, b_{2^m}$ 的平均值是甚麼？

停一停，試一試　對各個 b 應用 $(*)$，然後把兩邊同除以 A 的適當冪次，再取 n 次方根。

背後的數學

柯西的歸納法

柯西在他的《*Cours d'analyse*》（1821）中發表了這個證明；我們在第 2 章談過，正是這本書開創了分析學的嚴格處理。這種技巧現在稱為*向前—向後歸納法*（forward–backward induction）：先對無窮多個情形組成的一個序列（這裏是 2 的冪）證明命題成立，然後證明 n 的情形蘊含 $n-1$ 的情形。兩者合起來，就能到達每一個 n。我們的第 3 階段是由 2^m 直接跳到 n，但你也可以一步一步來：在 $n-1$ 個數之後補上一個它們的平均數，就能證明 n 的情形蘊含 $n-1$ 的情形。

一條不等式，多種證明

AM–GM 有數十種證明，把它們互相比較，是認識不同數學風格的好方法。

- **利用凸性（convexity）。**對數（logarithm）函數是凹（concave）函數，所以對數的平均不大於平均的對數。取指數之後，這就是 AM–GM；這也是 Section 3.3 的主題。
- **波利亞（George Pólya）的證明。**利用 $e^{x-1} \geq x$（e^{x-1} 在 $x = 1$ 處的切線位於曲線下方）。設 A 為平均數，把這條不等式應用於每一個 a_i/A，然後相乘：$\prod \frac{a_i}{A} \leq e^{\sum(a_i/A-1)} = e^0 = 1$。波利亞說這個證明是他在夢中想到的。
- **利用磨光法（smoothing）。**如果其中兩個數不相等，就把它們都換成兩者的平均數。算術平均不變，而由兩個數的情形可知，乘積會增大。重複這個步驟，所有數就會被推向平均數。

不用微積分的最優化

AM–GM 能把許多最優化問題變成一行就能解決的問題。在表面積固定的所有長方體盒子當中，哪一個體積最大？在周界固定的所有長方形當中，哪一個面積最大？（是正方形，由兩個數的情形可知：$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$，等號當 $x = y$ 時成立。）等號成立的條件告訴你最優值在哪裏出現，而不等式則告訴你那確實是最優值，而不僅僅是一個駐點（stationary point）。可與 Section 3.1 中的告誡比較。

延伸練習

1. **後退一步。**補上一個平均數的副本，直接證明：若 AM–GM 對 n 個數成立，則它對 $n-1$ 個數也成立。
2. **一個遞增數列。**把 AM–GM 應用於 $1+\frac{1}{n}, \ldots, 1+\frac{1}{n}, 1$ 這 $n+1$ 個數（其中 $1+\frac{1}{n}$ 有 n 個），證明 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$。
3. **最好的盒子。**一個密封的長方體盒子的表面積為 S。把 AM–GM 用於三個不同的面的面積，證明其體積不大於 $(S/6)^{3/2}$，等號在盒子為正方體時成立。
4. **調和平均（harmonic mean）。**把 AM–GM 應用於 $1/a_i$ 這些數，證明調和平均 $\dfrac{n}{1/a_1 + \cdots + 1/a_n}$ 不大於幾何平均。

延伸閱讀

- **J. Michael Steele, *The Cauchy–Schwarz Master Class*** (Cambridge University Press)。一

本以問題帶動、講不等式的出色著作，正好由這個程度起步。第 2 章講的就是 AM–GM。

- **Hardy, Littlewood & Pólya, *Inequalities***（Cambridge University Press）。經典參考書，由二十世紀三位偉大的分析學家撰寫。
- **Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies***（Springer）。第 7 章收錄了大量來自數學奧林匹克的不等式題目。

完整的引導式解答見第 3.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/am-gm-backwards.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com