3.1 找出錯處

工作紙

題目

STEP I 1991，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/91-s1-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　當題目要求你「評論每一步」時，你在每一步應該檢查甚麼？動筆之前先列一張清單。

階段 1 導數求對了嗎？

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 自己用商式法則（quotient rule）對 g 求導，並把分子因式分解（factorise）。$g'(x) = 0$ 在哪裏成立？

停一停，試一試 把 $x = 1$ 和 $x = -1$ 直接代入你已因式分解的 $g'(x)$ 檢查一下。它們是駐點（stationary point）嗎？

階段 2　函數值算對了嗎？

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　自己算出 $g(0)$、$g(1)$ 和 $g(-1)$。它們與論證中的數值一致嗎？

階段 3 比較函數值能告訴你哪一個是極大值嗎？

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 假設某函數恰好有兩個駐點，其函數值分別為 $\frac{3}{4}$ 和 1。前者是否必定是極小值（minimum），後者是否必定是極大值（maximum）？

停一停，試一試 根據 $g'(x)$ 在 0 兩側的正負號，判斷 $x = 0$ 處駐點的性質。

階段 4　駐點的函數值能界定函數的範圍嗎？

涵蓋：第 (i) 部分

停一停，試一試　那麼結論本身是否仍然成立？當 $x \to \pm\infty$ 時，$g(x)$ 會怎樣？$g(x)$ 何時為負？試找出一個使 $g(x) < \frac{3}{4}$ 的 x。

階段 5 **積分**

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 對 $-3(1-x)^{-4}$ 求導。你得到 $(1-x)^{-3}$ 嗎？

想一想 用上正確的原函數（antiderivative）後，答案仍然是 0。那麼，結論終究是對的嗎？

停一停，試一試 微積分基本定理（fundamental theorem of calculus）要求被積函數（integrand）在整個區間上連續（continuous）。$(1-x)^{-3}$ 在 $[-1,3]$ 上連續嗎？在那個出問題的點附近，積分會怎樣？

背後的數學

大數學家也會出錯

分析學的奠基者也犯過一模一樣的錯誤。柯西（Augustin-Louis Cauchy）在 1821 年的 *Cours d'analyse* 中「證明」了連續函數的收斂（convergent）和必定連續。1826 年，阿貝爾（Niels Henrik Abel）指出了一個反例（counterexample）：傅立葉級數（Fourier series）

$$\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \cdots$$

對每一個 x 都收斂，而且每一項都連續，但它的和在 $x = \pm\pi$ 處出現跳躍（當 $-\pi < x < \pi$ 時，它等於 $x/2$）。要弄清楚柯西的論證究竟錯在哪裏，花了數十年時間，並由此產生了**一致收斂**（uniform convergence）的概念，如今每個修讀分析的學生都要學。隱藏的假設，尤其是關於交換兩個極限次序的假設，是整個分析學中最常見的錯誤來源。

帶有前提的定理

這一題中有兩個錯誤，都源於忽視了定理的前提（hypotheses）。

- **極值定理**（extreme value theorem）指出，在有界閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數必定取得最大值和最小值。要找出它們，須檢查端點、駐點，以及函數不可導的點：$|x|$ 在 $[-1,1]$ 上的最小值在 0 處取得，而這一點既非端點，亦非駐點。如果 f 在區間內部處處可導，則位於內部的最大點或最小點必定是駐點。在整條實數線上，沒有端點可供檢查，函數甚至可能根本沒有最大值；你必須改為考察 $x \to \pm\infty$ 時的表現。
- **微積分基本定理**要求被積函數在 $[a,b]$ 上連續。如果不連續，積分可能仍然存在（試試 $\int_0^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x$），也可能不存在（如本題），你必須用極限來檢查。

在大學裏，你遇到的每一條定理都附有一張精確的前提清單。訓練的一部分，就是每次使用定理之前，都要把這些前提檢查一遍。

發散積分的一個值

第 (ii) 部分還有一個耐人尋味的註腳。區間 $[-1,3]$ 關於出問題的點 $x = 1$ 對稱，而 $(1-x)^{-3}$ 關於該點是「奇」的。如果你挖去一個對稱的缺口 $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$，再令 $\varepsilon \to 0$，兩塊無窮大的部分便會互相抵消，你確實會得到 0。這稱為**柯西主值**（Cauchy principal value），在物理學和複分析中確實很有用。但它是一個刻意選取的不同定義，一個誤打誤撞得出這個值的論證，甚麼也沒有證明。

延伸練習

1 **會說謊的代換。**試做 STEP I 1987，第 8 題（step.maths.org/questions/87-s1-q8）。一個代換（substitution）似乎顯示某個正的積分等於一個負的積分。準確找出論證在哪裏出錯，然後正確地計算兩個積分。

2 **是對還是錯？**試做 STEP I 1998，第 3 題（step.maths.org/questions/98-s1-q3）：有四個斷言要你證明或否證。對每一個斷言，動筆之前先判斷你預期是哪一種。

3 **所有馬都是同一種顏色。**找出以下用歸納法（induction）寫成的「證明」的漏洞：任何一匹馬都與自己顏色相同；給定 $n+1$ 匹馬，由歸納假設，前 n 匹顏色相同，後 n 匹也是；兩組有重疊，所以全部 $n+1$ 匹顏色相同。

4 **一個確實存在的積分。**證明 $\int_{-1}^{1} |x|^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 存在，儘管被積函數在 0 處沒有定義，並求出它的值。

延伸閱讀

- **E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics***（Cambridge University Press）。一本經典的謬誤論證集，收錄各種似是而非的錯誤論證，按課題編排，為高中第六學級（sixth form）學生而寫。
- **Bernard Gelbaum & John Olmsted, *Counterexamples in Analysis***（Dover）。數以百計的例子，說明定理的前提為何重要。開始修讀分析課程之後，不妨隨手翻閱。
- **Imre Lakatos, *Proofs and Refutations***（Cambridge University Press）。一篇精彩的對話，探討數學家如何發現並修正證明中的錯誤。

完整的引導式解答見第 3.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch03/spot-the-flaw.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com