2.9 逐步逼近 e 的分數

工作紙

題目

STEP II 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　$t(1-t)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是多少？由此可知，當 n 增大時 T_n 的大小會怎樣變化？

階段 1 求導兩次

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 設 $p(t) = t^n(1-t)^n = [t(1-t)]^n$。先求導（differentiate）一次，並利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[t(1-t)] = 1-2t$。

停一停，試一試 再求導一次，然後抽出公因式（common factor）$n\,t^{n-2}(1-t)^{n-2}$。為了配合題目要求的形式，把 $(1-2t)^2$ 用 $t(1-t)$ 表示。

階段 2　分部積分兩次

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　$p(t)$ 在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 時都等於零。那麼當 $n \geq 2$ 時，$p'(t)$ 又如何？用分部積分法（integration by parts）計算 $p(t)\,e^t$ 的積分時，這一點為甚麼重要？

停一停，試一試　分部積分兩次，使 p'' 出現。利用第 (i) 部分的結果，除以 $n!$，再認出那兩個積分。

階段 3 整數結構

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 用分部積分法直接求出 T_0 和 T_1。

停一停，試一試 兩者都是 $a + b\,e$ 的形式，其中 a 和 b 是整數（integer）。為甚麼第 (ii) 部分的遞推關係（recurrence）會保持這個形式？

階段 4　數值很小，因而大有啟示

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想　當 $0 < t < 1$ 時，為 $t^n(1-t)^n$ 和 e^t 定出界限（bound）。由此可得出 T_n 的甚麼結論？

停一停，試一試　把 $0 < a_n + b_n e < \frac{e}{n!}$ 除以 $|b_n|$。這說明 e 與 $-a_n/b_n$ 之間的距離有甚麼特點？

背後的數學

e 是無理數的另一個證明

這道題離一個著名定理只差一步。假設 $e = p/q$，其中 p, q 是正整數。那麼

$$q\,T_n = qa_n + b_n p$$

是一個整數。但是 $0 < q\,T_n < \dfrac{qe}{n!}$，而當 n 很大時，右邊小於 1。於是 qT_n 就會是一個嚴格介乎 0 與 1 之間的整數，這是不可能的。因此 e 是無理數。這正是 Section 1.4 中「把一個整數困在 0 與 1 之間」的想法，只是這次由積分而不是級數來實現。正是這一

類積分，配合 $t^n(1-t)^n$ 這樣的多項式，在 1873 年被夏爾·埃爾米特（Charles Hermite）用來證明 e 是超越數：它不是任何整係數多項式的根。

連分數

表中的分數不僅是好；它們更屬於最佳之列。e 的連分數（continued fraction）由歐拉（Euler）發現，有一個優美的規律：

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots],$$

而它的漸近分數（convergents）是 $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \ldots, \frac{2721}{1001}, \ldots$。我們的 $-a_n/b_n$ 恰好是每隔兩個取一個的漸近分數。沒有任何分母更小的分數能更接近 e。歐拉發現的這個規律本身就是 e 是無理數的第一個證明，因為只有有理數才有有限的連分數。

阿佩里的奇蹟

1978 年，羅傑·阿佩里（Roger Apéry）宣佈證明了 $\zeta(3) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots$ 是無理數，這是自歐拉以來一直懸而未決的問題（見 Section 2.3）。他的證明實在太出人意表，以致在場聽眾起初並不相信。一年後，Frits Beukers 找到一個簡短的版本，所用的積分形如

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{-\ln(xy)}{1-xy}\, P_n(x) P_n(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

其中 P_n 由 $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big(x^n(1-x)^n\big)$ 構造而成。這些積分很小，是正數，並且形如「整數 + 整數 $\times\, \zeta(3)$」再除以一個受控的分母：這正是本題的策略。至於 $\zeta(5)$ 或 $e + \pi$ 是否無理數，至今仍然未知。

延伸練習

1. **運行遞推關係。**由遞推關係計算 $n = 2, 3, 4$ 時的 a_n 和 b_n，並核對表中的分數。證明 b_n 的正負號交替出現。

2. **更精確的上界。**證明 $0 < T_n < \dfrac{e}{4^n\, n!}$。這把 $-a_n/b_n$ 的誤差估計改進了多少？

3. **無理性的證明。**把上面方框中的論證仔細寫出來。你究竟在哪一處用到 $T_n > 0$？

4. **換一個權函數。**較難把 e^t 換成 e^{2t}，重做這道題（即 $U_n = \int_0^1 \frac{t^n(1-t)^n}{n!} e^{2t}\, \mathrm{d}t$）。求 U_n 的遞推關係，證明 U_n 是 1 和 e^2 的有理係數組合，並探究這個論證是否仍能證明 e^2 是無理數。（與 Section 1.4 比較。）

延伸閱讀

- **Ivan Niven, *Irrational Numbers***（Mathematical Association of America）。關於無理性證明的經典小書，當中包括埃爾米特的方法。
- **Alfred van der Poorten, 「A proof that Euler missed」**, *The Mathematical Intelligencer* 1 (1979)。生動地記述阿佩里的證明及其所得到的迴響。
- **Julian Havil, *The Irrationals***（Princeton University Press）。一部無理數的歷史，為一般數學讀者而寫。

完整的引導式解答見第 2.9 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/e-approximations.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com