2.8 平方再減二

工作紙

題目

STEP III 2021，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　為甚麼 $[-2, 2]$ 內的數永遠無法逃出去？當 $-2 \le x \le 2$ 時，$x^2 - 2$ 最大和最小可以是多少？

階段 1 逃逸

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 4^{n-1} 這個因子提示：每走一步，與 2 的距離至少變為原來的四倍。設 $x_n = 2 + d$：以 d 表示，x_{n+1} 是甚麼？

停一停，試一試 把這個結果用於對 n 的歸納法（induction）。先驗證 $n = 1$ 的情況。

階段 2　逃逸當且僅當 $|a| > 2$

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　「當且僅當」（if and only if）表示要分開作兩個證明。第 (i) 部分幾乎已給出其中一個方向。當 $a < -2$ 時，還需要補上甚麼？

停一停，試一試　至於另一個方向：若 $-2 \le x \le 2$，$x^2 - 2$ 最大可以是多少，最小又可以是多少？

階段 3 隱藏的公式

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 若 $a > 2$，則存在一個數 $t > 1$ 使得 $a = t + \frac{1}{t}$。為甚麼？

停一停，試一試 以 t 表示，求出 x_2 和 x_3。x_n 有甚麼規律？

階段 4　乘積裂項相消（telescope）

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　$\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)$ 等於甚麼？把結果再乘以 $t^2+\frac{1}{t^2}$。$\left(t-\frac{1}{t}\right)x_1x_2\cdots x_n$ 會變成甚麼？

停一停，試一試　以 t 表示，計算 x_{n+1}^2-4，並與上述乘積比較。A 取甚麼值時，y_n 的兩個表達式才會一致？以 A 表示，a 又是甚麼？

階段 5 y_n **是否收斂（converge）？**

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想** 取這個 a 值，把 y_n 單以 x_{n+1} 表示。第 (ii) 部分告訴你 x_{n+1} 有甚麼性質？

背後的數學

秩序與混沌

在 $[-2,2]$ 之內會發生甚麼事？在那裏 $a = t + 1/t$ 行不通（它需要 $|a| \geq 2$），但三角函數的版本卻可行：設 $a = 2\cos\theta$。則 $x_2 = 4\cos^2\theta - 2 = 2\cos 2\theta$，而一般地

$$x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta).$$

所以在區間之內，這個映射只不過是*把角度加倍*。聽起來無傷大雅，但把角度加倍其實是混沌的。把 θ/π 寫成二進制（binary）：加倍會把二進制小數點向右移一位，並丟掉最前面的一位數字。經過 50 步之後，x_n 取決於 θ/π 的第 51 位二進制數字，所以初始值若有 10^{-15} 的誤差（一般電腦的精確度），50 步之後的答案就完全不可靠。這種對初始條件的敏感依賴（sensitive dependence on initial conditions）正是混沌的標誌，見圖 2.8.1。映射 $x \mapsto x^2 - 2$ 經變數代換後，等價於著名的邏輯斯諦映射（logistic map）$x \mapsto 4x(1-x)$，我們會在 Section 8.7 再遇上它。

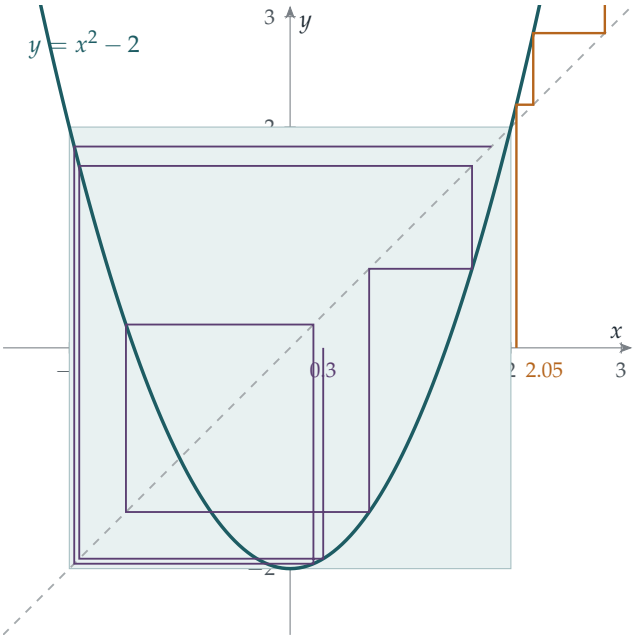

圖 2.8.1　$x_{n+1} = x_n^2 - 2$ 的蛛網圖（cobweb diagram）。由 0.3 出發（紫紅色），軌道（orbit）永遠留在陰影正方形 $[-2,2]^2$ 之內，混沌地遊走。由區間外不遠處的 2.05 出發（琥珀色），它就會逃逸：$2.05, 2.20, 2.85, 6.13, \ldots$

尋找最大的質數

梅森數是指 $M_p = 2^p - 1$。盧卡斯（Édouard Lucas）在 1876 年發現了一個出色的檢驗法，用來判斷 M_p 是否質數（其中 p 為奇質數），其後萊默（Derrick Lehmer）在 1930 年把它完善：由 $s_0 = 4$ 開始，反覆平方後減 2，每次都取模（modulo）M_p 化簡。則

$$M_p \text{ 是質數} \iff s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}.$$

以 $M_7 = 127$ 為例：$s = 4, 14, 194 \equiv 67, 67^2 - 2 \equiv 42, 42^2 - 2 \equiv 111, 111^2 - 2 \equiv 0$，所以 127 是質數。它與本題的聯繫就在於那個代換：$4 = t + 1/t$，其中 $t = 2 + \sqrt{3}$，所以 $s_k = (2+\sqrt{3})^{2^k} + (2-\sqrt{3})^{2^k}$，而檢驗法的證明用到形如 $a + b\sqrt{3}$ 的數的算術，與 Section 1.6 的高斯整數（Gaussian integers）頗為相似。由於每一步只需要一次平方，這個檢驗法極為快速，這就是為甚麼已知最大的質數中的大部分，包括現時的紀錄保持者，都是梅森質數（並非全部都是：其他特殊形式，例如 $a^{2^n} + 1$，也有各自的快速檢驗法）。在本書撰寫之時，紀錄是 $2^{136279841} - 1$，這個數有多於 41 百萬位數字，於 2024 年發現。

曼德博集合

把 -2 換成任意常數 c，並容許複數：$z \mapsto z^2 + c$。令 0 的軌道保持有界的所有 c 所組成的集合，就是曼德博集合（Mandelbrot set）。我們的映射對應 $c = -2$，即曼德博集合最左邊的一點，而軌道保持有界的初始值所組成的集合（它的茹利亞集合（Julia set））正好是我們在第 (ii) 部分找到的區間 $[-2, 2]$。對於幾乎所有其他的 c，這個集合都是分形（fractal）。

延伸練習

1 **區間之內。**證明若 $a = 2\cos\theta$，則 $x_n = 2\cos(2^{n-1}\theta)$。求所有使得 $x_3 = a$ 但 $x_2 \neq a$ 的 a 值。（提示：你需要 $4\theta \equiv \pm\theta$，模 2π。）

2 **手算盧卡斯－萊默檢驗法。**用這個檢驗法證明 $M_5 = 31$ 是質數，而 $M_{11} = 2047$ 不是。（對 M_{11} 你需要九步；用計算機會有幫助。把 2047 作因數分解，以驗證你的結論。）

3 **一個具體例子。**取 $A = \frac{3}{2}$。求 a 和 t，並以數值驗證公式 $y_1 = \sqrt{x_2^2 - 4}/x_2$。

4 **裂項相消的和。**較難設 $a = t + 1/t$ 且 $t > 1$，證明

$$\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n} = \frac{t - t^{-1}}{t^{2^n} - t^{-2^n}}.$$

利用恆等式 $\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{z^2-1} = \dfrac{z}{z^2-1}$，其中 $z = t^{2^n}$，由此推出

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1 x_2 x_3} + \cdots = \frac{1}{t}.$$

當 $a = 3$ 時，以數值驗證這個結果。

延伸閱讀

- **Ian Stewart, *Does God Play Dice?***（Penguin）。講述混沌的經典科普著作，當中包括邏輯斯諦映射。
- **Steven Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos***（CRC Press）。標準的大學本科入門教材；第 10 章講述像本題這樣的一維映射。
- **Marcus du Sautoy, *The Music of the Primes***（Fourth Estate）。書中包括搜尋梅森質數的故事。

完整的引導式解答見第 2.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/squaring-minus-two.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com