2.7 六位還是六百位

工作紙

題目

STEP II 2023，第 5 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2023 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　你留意到這兩列數有甚麼特別嗎？（看看哪些分數在兩列中都有出現。）

階段 1　第一個遞推公式的項始終不小於 1

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　把 x_{n+1} 改寫成 $1 + \dfrac{1}{\text{某個式子}}$ 的形式，然後使用歸納法（induction）。

階段 2 第一個遞推公式的誤差

涵蓋：第 (i) 部分

停一停，試一試 把 $x_{n+1}^2 - 2$ 寫成以 x_n 表示的單一分數。分子有甚麼值得留意的地方？$\frac{1}{(x_n+1)^2}$ 必定有多小？

階段 3 十步

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 由 x_0 開始，把這個不等式（inequality）連用十次。至於不等號的方向，可留意 $x_n^2 - 2$ 的正負號：每走一步，它會怎樣變化？

階段 4　第二個遞推公式的誤差

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試**　把 $y_{n+1} - \sqrt{2}$ 寫成單一分數。分子應該會令你想起完全平方（perfect square）。然後用歸納法證明 $y_n \geq 1$。

階段 5 誤差的平方

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 設 $e_n = y_n - \sqrt{2}$。利用 $y_n \geq 1$，以 e_n^2 給出 e_{n+1} 的上界（bound）。

停一停，試一試 用歸納法證明當 $n \geq 1$ 時 $e_n \leq 2r^{2^n}$，其中 $r = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$。請仔細檢查歸納基礎（base case）。

階段 6　六百位數字

涵蓋：第 (ii) 部分

> **想一想**　r 與 $\frac{1}{4}$ 相比，哪個較大？然後比較 2^{10} 與 10^3。

背後的數學

牛頓法

第二個方法其實是把牛頓法（Newton's method）應用於 $f(y) = y^2 - 2$。牛頓法求 f 的根的做法，是反覆把猜測值 y 換成 y 處的切線與橫軸的交點：

$$y_{\text{新}} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{y^2 - 2}{2y} = \frac{y^2 + 2}{2y}.$$

在單根（simple root）α 附近，由泰勒展開式（Taylor expansion）可知新誤差約為 $\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)} \times (\text{舊誤差})^2$，這就是牛頓法二次收斂（quadratic convergence）的原因。這個特殊情況，即「取 y 與 $2/y$ 的平均值」，古巴比倫人早已知道；一塊約公元前 1700 年的泥板（現稱為 YBC 7289）以 60 進制給出 $\sqrt{2}$ 的值，誤差小於百萬分之一。

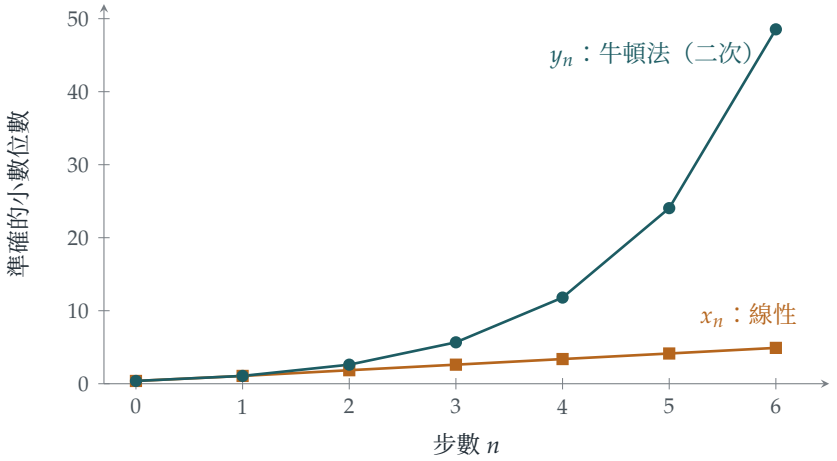

圖 2.7.1　兩個方法各走 n 步之後，$\sqrt{2}$ 的準確小數位數。線性的方法每一步增加約 0.77 位；牛頓法則每一步令準確位數大約加倍，到 $n = 10$ 時達到約 780 位。

不動點及其收斂速度

兩個方法都具有 $u_{n+1} = g(u_n)$ 的形式，而且 $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$，所以 $\sqrt{2}$ 是一個不動點（fixed point），正如 Section 2.2 的蛛網圖（cobweb diagram）所示。在不動點 α 附近，誤差每一步大約乘以 $g'(\alpha)$。對第一個方法而言，$g(x) = \frac{x+2}{x+1}$，而 $g'(\sqrt{2}) = -\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^2} = -(3-2\sqrt{2}) \approx -0.17$：負號解釋了正負號為何交替，0.17 則解釋了每一步為何增加 0.77 位（$\log_{10}(1/0.17) \approx 0.77$）。對牛頓法而言，$g'(\alpha) = 0$，所以線性項消失，誤差由下一項（即平方項）決定。設計出滿足 $g'(\alpha) = 0$ 的迭代（iteration），正是快速數值方法的精髓所在。

為何出現相同的分數

分數 $x_n = p_n/q_n$ 滿足 $p_{n+1} = p_n + 2q_n$ 和 $q_{n+1} = p_n + q_n$，並且 $p_n^2 - 2q_n^2 = \pm 1$，正負交替。它們是佩爾方程（Pell's equation）$p^2 - 2q^2 = \pm 1$ 的解，也是連分數（continued fraction）$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \ldots]$ 的漸近分數（convergents）。它們來自 $1 + \sqrt{2}$ 的冪：$p_n + q_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^{n+1}$。牛頓法的每一步把 $p + q\sqrt{2}$ 平方（不妨一試：$(p+q\sqrt{2})^2 = p^2 + 2q^2 + 2pq\sqrt{2}$，而 $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ 正是把牛頓法的公式應用於 p/q 的結果）。平方令指數加倍，這就是 $y_n = x_{2^n-1}$ 的原因。同樣的「平方」模式，也是 Section 2.8 中迭代的動力來源。

延伸練習

1 **佩爾方程。**證明：若 $y_n = p/q$ 為最簡分數，且 $p^2 - 2q^2 = 1$，則 $y_{n+1} = \dfrac{p^2 + 2q^2}{2pq}$ 亦滿足這個方程。驗證 $577^2 - 2 \times 408^2 = 1$。

2 **立方根。**寫出應用於 $f(y) = y^3 - 2$ 的牛頓法，並證明新誤差為 $\dfrac{(y_n - \alpha)^2(2y_n + \alpha)}{3y_n^2}$，其中 $\alpha = \sqrt[3]{2}$。由此推出：若 $y_n > \alpha$，則新誤差最多是舊誤差平方的 $\frac{1}{\alpha}$ 倍。（提示：利用 $\alpha^3 = 2$。）

3 **不用除法的除法。**證明應用於 $f(y) = \frac{1}{y} - a$ 的牛頓法給出 $y_{n+1} = y_n(2 - a y_n)$，當中無需除法。若 $e_n = 1 - a y_n$，證明 $e_{n+1} = e_n^2$。（電腦處理器正是用這類迭代來做除法的。）

4 **牛頓法失效的時候。**把牛頓法應用於 $f(y) = y^{1/3}$，它唯一的根是 0。證明無論從哪裏開始，每一步都令與根的距離加倍。誤差公式的哪一個假設不成立？

延伸閱讀

- **Endre Süli & David Mayers, *An Introduction to Numerical Analysis***（Cambridge University Press）。標準的大學本科數值分析教科書；第 1 章講述不動點迭代和牛頓法。
- **Nick Higham (ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics***（Princeton University Press）。收錄有關牛頓法和數值分析的短文，由專家執筆，面向廣大讀者。
- **David Fowler & Eleanor Robson, “Square root approximations in Old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context”**（古巴比倫數學中的平方根近似值），*Historia Mathematica* 25 (1998)。

完整的引導式解答見第 2.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/newton-speed.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com