2.6 算術幾何平均

工作紙

題目

STEP II 2024，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2024 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　為甚麼兩個不相等的正數的算術平均，總是大於它們的幾何平均？你能用一行證明嗎？

階段 1　兩個數列互相夾緊

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　利用題目給出的提示：$(\sqrt{x_n}-\sqrt{y_n})^2>0$。由此可知 x_{n+1} 與 y_{n+1} 有甚麼關係？

想一想　為甚麼 $x_{n+1}<x_n$ 而 $y_{n+1}>y_n$？這說明這兩個數列（sequence）有甚麼性質？

停一停，試一試　至於兩者的差距，試比較 $x_{n+1}-y_{n+1}$ 與 $x_{n+1}-y_n$。每一步之後，差距按甚麼倍數縮小？

階段 2　代換

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　設 $t = \frac{1}{2}\left(x - \frac{pq}{x}\right)$，計算 $t^2 + pq$ 和 $t^2 + \frac{1}{4}(p+q)^2$。它們可以因式分解（factorise）嗎？

停一停，試一試　再求 $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$。當 x 由 0 變到 ∞ 時，t 如何變化？把各部分組合起來，並利用以 t 為變量的被積函數（integrand）是偶函數（even function）這一事實。

階段 3 **計算積分**

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** 由 (x_0, y_0) 開始，反覆應用這個恆等式（identity）。當 $n \to \infty$ 時，$\mathrm{I}(x_n, y_n)$ 會怎樣？直接計算 $\mathrm{I}(M, M)$。

背後的數學

比題目所說的還要快

第 (i) 部分證明了差距每一步至少減半，這相當於每一步大約多得一個二進制位。引子中的表格所顯示的卻驚人得多：正確位數每一步大約*增加一倍*（$2, 4, 10, 21, 43, \ldots$）。事實上

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = \frac{(x_n - y_n)^2}{2\left(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}\right)^2},$$

所以每個差距大約是一個常數乘以前一個差距的*平方*。這稱為*二次收斂*（quadratic convergence），我們會在 Section 2.7 中仔細探討。

橢圓積分

我們的積分 $\mathrm{I}(p, q)$ 其實是一個喬裝了的*完全橢圓積分*（complete elliptic integral）。這類積分在計算橢圓的弧長時出現，而且不能用你所認識的函數表示。它最著名的應用是單擺。高級程度（A-level）課程中的週期公式 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ 只是小幅度擺動時的近似。由角度 θ_0 釋放的單擺，其準確週期是

$$T = \frac{2\pi\sqrt{L/g}}{M\left(1, \cos\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

這是一個可用 AGM 求值的橢圓積分。當 $\theta_0 = 90^\circ$ 時，真正的週期比簡單公式所預測的長約 18%。高斯那則日記所談的是雙紐線，一條 8 字形的曲線，它的總弧長涉及

$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$；這個積分其實就是喬裝了的 $\mathrm{I}(\sqrt{2},1)$，所以可以用 AGM 求值。

計算 π

1976 年，Richard Brent 與 Eugene Salamin 各自獨立地把高斯的想法變成一個計算 π 的算法（algorithm），每一步都令正確位數增加一倍。二十五步便可得出數千萬位。在 1980 及 1990 年代，這類算法曾用於多次刷新紀錄的 π 計算；時至今日，凡是需要高精度的地方，類似的二次收斂算法已成為標準工具。試比較 Section 2.5 中的韋達（Viète）乘積，它每一步只多得約 0.6 位。

延伸練習

1 **二次收斂。**證明恆等式 $x_{n+1}-y_{n+1}=\dfrac{(x_n-y_n)^2}{2(\sqrt{x_n}+\sqrt{y_n})^2}$，並由此推出 $x_{n+1}-y_{n+1}\le \dfrac{(x_n-y_n)^2}{8y_0}$。

2 **親手計算。**用計算機求 $M(2,1)$，準確至六位小數。你需要多少步？

3 **縮放。**證明對 $\lambda>0$ 有 $M(\lambda x,\lambda y)=\lambda M(x,y)$，以及 $\mathrm{I}(\lambda p,\lambda q)=\lambda^{-1}\mathrm{I}(p,q)$。驗證這兩個事實與 $\mathrm{I}(x_0,y_0)=\pi/(2M)$ 互相吻合。

4 **單擺。**利用上面的公式，求由 60° 釋放的單擺的週期比小角度近似的預測值長多少，答案準確至三位有效數字。

延伸閱讀

- **David Cox, “The arithmetic–geometric mean of Gauss”**, *L'Enseignement Mathématique* 30 (1984)。講述這段歷史和有關數學的經典文章；開首幾節只需要微積分知識。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM*** (Wiley)。關於 AGM 與 π 的快速計算的權威著作。
- **Jonathan Borwein & Keith Devlin, *The Computer as Crucible*** (A. K. Peters)。講述實驗數學，包括像高斯那樣憑着留意數值上的巧合而得出的發現。

完整的引導式解答見第 2.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/agm.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com