2.5 韋達乘積

工作紙

題目

STEP III 2022，第 4 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　sinh 的倍角公式是甚麼？（如果不肯定，可把 $\sinh 2y$ 和 $\sinh y \cosh y$ 用指數函數寫出來，再作比較。）

階段 1 反覆減半

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 $n = 1$ 的情況就是倍角公式（double-angle formula）$\sinh 2y = 2\sinh y \cosh y$，其中 $y = \frac{x}{2}$。

停一停，試一試 若公式對 n 成立，它的最後一個因子是 $\sinh(x/2^n)$。對這個因子應用倍角公式。至於其後的推論，把等式除以 x 再整理即可。

階段 2　極限（limit）

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想　由 $\sinh y$ 的級數（series）可知，當 $y \to 0$ 時，$\dfrac{\sinh y}{y}$ 趨向甚麼？

停一停，試一試　固定 x，在第 (i) 部分中令 $n \to \infty$。$\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ 會怎樣？

階段 3　$\ln 2$ 的公式

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　取 $x = \ln 2$，則 $e^{x/2} = \sqrt{2}$。求出 $\cosh \frac{x}{2}$ 和 $\cosh \frac{x}{4}$，並加以化簡。

停一停，試一試　找出 $\cosh(x/2^k)$ 的一般規律。把各個因子相乘時，2 的冪合起來是甚麼？另外也求出 $\frac{\sinh x}{x}$。

階段 4　韋達（Viète）公式

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想　第 (iv) 部分出現了 π，所以它必定來自普通的三角學。把 sinh 和 cosh 換成 sin 和 cos 之後，第 (i) 和第 (ii) 部分是否仍然成立？

停一停，試一試　選取 x 使得 $\frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$，然後求出最初幾個因子。半角公式（half-angle formula）$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$ 會有幫助。

背後的數學

阿基米德（Archimedes）的多邊形

韋達公式有一個幾何意義，可追溯至阿基米德。內接（inscribed）於半徑為 1 的圓的正 2^n 邊形，面積是 $A_n = 2^{n-1}\sin\frac{2\pi}{2^n}$。把邊數加倍，面積就乘以

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2^n \sin(\pi/2^n)}{2^{n-1}\cdot 2\sin(\pi/2^n)\cos(\pi/2^n)} = \frac{1}{\cos(\pi/2^n)}.$$

由正方形（$A_2 = 2$）開始，不斷把邊數加倍，面積便趨向圓的面積 π。所以 $\pi = 2 \div$

$(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\cdots)$，這正是韋達公式。乘積中的每個因子，都是圖 2.5.1 中相鄰兩個多邊形的面積之比。

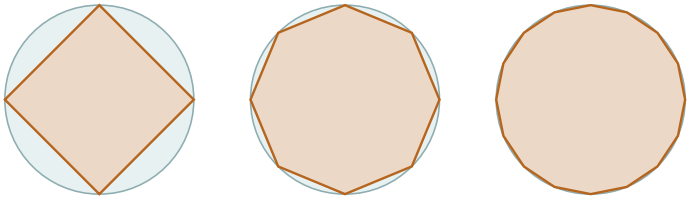

圖 2.5.1　內接於半徑為 1 的圓的正多邊形，邊數分別為 4、8 和 16。邊數每加倍一次，面積就多除以韋達乘積中的一個因子，而面積不斷增大並趨向 π。

無窮乘積

韋達乘積是數學史上第一個無窮乘積。其後陸續有其他例子：沃利斯（John Wallis）在 1655 年發現 $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$，而歐拉（Euler）關於 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘積已在 Section 2.4 出現過。到了大學，你會學到無窮乘積在甚麼情況下收斂（converge）。粗略地說，當 $\prod(1+a_n)$ 中的 a_n 是細小的正數時，它的表現與 $\sum a_n$ 相似，因為 $\ln(1+a_n)\approx a_n$。這裏 $1-\cos(\pi/2^n)\approx\frac{1}{2}(\pi/2^n)^2$，每次縮小 4 倍，所以這個乘積收斂得很快。

有多快？

乘了 n 個因子之後，部分積恰好等於 $\dfrac{1}{2^n\sin(\pi/2^{n+1})}$，其誤差大約是 $\frac{\pi^2}{6\cdot 4^{n+1}}$ 乘以 $\frac{2}{\pi}$。每多一個因子，答案的準確度大約提高 4 倍，即多得大約 0.6 個小數位。十個因子可使 $2/\pi$ 準確至六個小數位。這已經不錯，但遠遠不及 Section 2.6 的方法那麼快，那些方法每一步都令準確的位數加倍。

延伸練習

1 **1990 年的版本。**試做 STEP I 1990，第 8 題（step.maths.org/questions/90-s1-q8）。它循一條與本節不同的途徑得出韋達乘積，所用的不外乎 sin 的倍角公式。你覺得哪一種方法較為自然？

2 **另一個角。**在 $\frac{\sin x}{x}$ 的乘積中取 $x=\frac{\pi}{3}$，把 $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ 寫成無窮乘積，並化簡最初兩個因子。

3 **要多少個因子？**用計算機找出韋達乘積需要多少個因子，才能使 π 準確至 4 個小數位。解釋為甚麼每多一個因子大約多得 0.6 個數位。

4 $\ln 3$ **的公式。**取 $x = \ln 3$ 重做第 (iii) 部分，把 $\frac{1}{\ln 3}$ 寫成無窮乘積。需要多少個因子才能使 $\frac{1}{\ln 3}$ 準確至兩個小數位？為甚麼這個乘積收斂得比韋達乘積慢？

延伸閱讀

- **Petr Beckmann, *A History of* π**（St Martin's Press）。阿基米德、韋達、沃利斯等人的故事，寫得興味盎然。
- **Jonathan Borwein & Peter Borwein, *Pi and the AGM***（Wiley）。關於計算 π 的嚴謹數學，包括 Section 2.6 的方法。讀完本章之後，第 1 章應該讀得懂。
- **Eli Maor, *Trigonometric Delights***（Princeton University Press）。書中有一章專門講述韋達和他的乘積。

完整的引導式解答見第 2.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/viete.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com