2.4 $\pi^2/6$

工作紙

題目

STEP III 2018，第 7 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/18-s3-q7

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　若多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根為 $r_1, \ldots, r_n$，那麼 $r_1 + \cdots + r_n$ 以係數表示是甚麼？

階段 1 棣美弗定理（De Moivre's theorem）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 把 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 寫成以 $\sin\theta$ 為分母的單一分數。分子有甚麼特別之處？

停一停，試一試 利用棣美弗定理，把 $\cot\theta + \mathrm{i}$ 和 $\cot\theta - \mathrm{i}$ 分別取 $2n+1$ 次方，然後相減。

階段 2　多項式（polynomial）

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　現在用二項式定理（binomial theorem）展開 $(c+\mathrm{i})^{2n+1}-(c-\mathrm{i})^{2n+1}$，其中 $c=\cot\theta$。哪些項會互相抵消，哪些項會變成兩倍？

停一停，試一試　哪些 θ 會使 $\sin(2n+1)\theta=0$ 但 $\sin\theta\neq 0$？利用這些值，求出以 $x=\cot^2\theta$ 為變數的多項式的 n 個不同的根（root）。為甚麼這些就是它的全部根？

階段 3 把根相加

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試 若多項式 $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 的根為 $r_1, \ldots, r_n$，則 $r_1 + \cdots + r_n = -a_{n-1}/a_n$。從第 (i) 部分讀出這兩個係數（coefficient）。

階段 4　夾逼（squeeze）

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　由 $0 < \sin\theta < \theta < \tan\theta$（其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$）出發。取倒數（reciprocal），再平方。$\frac{1}{\sin^2\theta}$ 與 $\cot^2\theta$ 有甚麼關係？

停一停，試一試　代入 $\theta = \frac{m\pi}{2n+1}$，並對 $m = 1, \dots, n$ 求和。第 (ii) 部分給出了外側的兩個和。當 $n \to \infty$ 時，上下界趨向甚麼？

背後的數學

歐拉的大膽論證

以現代標準來看，歐拉本人在 1734 年的論證並不嚴格，卻令人目眩神迷。一個多項式若以 $\pm a, \pm b, \pm c, \dots$ 為根，且在 0 處取值 1，便可分解為 $(1 - x^2/a^2)(1 - x^2/b^2)\cdots$。函數 $\frac{\sin x}{x}$ 在 0 處取值 1，而它的根是 $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$，於是歐拉把它當作一個「無限多項式」，寫下

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots .$$

右邊 x^2 的係數是 $-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)$，而由麥克勞林級數（Maclaurin series）$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{6}+\cdots$ 可知它是 $-\frac{1}{6}$。兩相比較便得 $\pi^2/6$。我們這個 STEP 證明正是同一想法的有限而嚴格的版本：一個多項式，它的根與 π 的倍數息息相關，再加上它的第二個係數。

平方倒數以外

歐拉其後還求出 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$、$\sum 1/m^6 = \pi^6/945$，而一般而言 $\sum 1/m^{2k}$ 是 π^{2k} 的有理數倍，當中涉及伯努利數（*Bernoulli numbers*）。奇數次冪則是另一回事：正如我們在 Section 2.3 所見，沒有人知道 $\sum 1/m^3$ 的公式。這些和就是黎曼 ζ 函數（Riemann zeta function）的值 $\zeta(2), \zeta(4), \ldots$，而這個函數在複數自變量上的表現，支配着質數的分佈（Section 1.2）。

日後在哪裏再遇上

在大學裏，你會至少再遇到 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 的三個證明：一個來自傅立葉級數（*Fourier series*）（把函數寫成正弦和餘弦之和），一個來自二重積分（double integral），還有一個來自複分析（complex analysis）。這個數也在概率中出現：隨機選出的兩個整數沒有公因數的機會是 $6/\pi^2 \approx 0.61$。（質數 p 同時整除兩者的概率是 $1/p^2$，所以沒有任何質數同時整除兩者的機會是 $\prod_p (1-1/p^2)$，而歐拉證明了這個乘積等於 $1/\zeta(2)$。）π 在概率極限中的另一次現身，是 Section 12.23 的主題。

延伸練習

1. **1992 年的版本。**試做 STEP III 1992，第 8 題（step.maths.org/questions/92-s3-q8）。它利用一個與本節相似的多項式，求出正切平方與餘割平方的準確和。（提示：若你知道一個多項式的根是 r_i，那麼哪個多項式的根是 $1/r_i$？）

2. **奇數的平方。**由 $\sum 1/m^2 = \pi^2/6$ 推導出 $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots = \frac{\pi^2}{8}$。

3. **四次方。**較難 利用 $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{i<j} r_i r_j$ 和多項式的係數，求 $\sum_{m=1}^{n} \cot^4\left(\frac{m\pi}{2n+1}\right)$，並改動夾逼的論證以證明 $\sum 1/m^4 = \pi^4/90$。

4. **有多快？**利用第 (iii) 部分的下界，證明 $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{4n}$。按這個結果，$n$ 要多大才能保證部分和與 $\pi^2/6$ 相差不超過 0.001？試與真正的誤差比較，後者接近 $1/n$。

延伸閱讀

- **William Dunham, *Euler: The Master of Us All***（Mathematical Association of America）。第 3 章講述巴塞爾問題的故事，並完整交代當中的數學。
- **Aigner & Ziegler, *Proofs from THE BOOK***，第 9 章「Three times $\pi^2/6$」。當中包括本節的證明。
- **Paul Nahin, *Dr. Euler's Fabulous Formula***（Princeton University Press）。內容涵蓋複數、傅立葉級數，以及類似本節的求和。

完整的引導式解答見第 2.4 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/basel.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com