2.3 一個發散級數與它的收斂近親

工作紙

題目

STEP III 2014，第 8 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/14-s3-q8

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　第一個不等式談的是由 $r = k^{n}$ 至 $r = k^{n+1} - 1$ 的那一塊。取 $k = 2$ 和 $n = 3$，這一塊包含哪些項？共有多少項？

階段 1　估計一個區塊的界

涵蓋：第一個不等式

想一想　取 $k = 2$ 和 $n = 3$，由 $r = k^n$ 到 $r = k^{n+1} - 1$ 的區塊（block）包含哪些項？共有多少項？一般而言，這個區塊有多少項？

停一停，試一試　f 是遞減（decreasing）的。在這個區塊內，$f(r)$ 的最小值和最大值分別是甚麼？把它們各自乘以項數。

階段 2　調和級數

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　取 $k = 2$ 和 $f(r) = \frac{1}{r}$，求出由 2^n 到 $2^{n+1} - 1$ 這個區塊的兩個界（bounds）。

停一停，試一試　每個區塊的貢獻都至少是同一個固定的量。把 $n = 0, 1, \ldots, N$ 的區塊加起來：當 $N \to \infty$ 時，部分和（partial sums）會怎樣？

階段 3 立方倒數之和

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 現在取 $f(r) = \frac{1}{r^3}$，仍然取 $k = 2$。第 n 個區塊的上界（upper bound）是甚麼？

停一停，試一試 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 的區塊剛好把每個正整數覆蓋一次。把各個上界加起來：這是一個等比級數（geometric series）。

階段 4　數算不含 2 的數

涵蓋：第 (iii) 部分

> **停一停，試一試**　把 0 至 999 的每個數都寫成三位數，容許前導零（leading zeros）（例如 7 寫成 007）。如果不准使用 2，每個數位有多少個選擇？記得把 0 剔除。

階段 5　Kempner 級數

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　按數字的位數來劃分區塊；這就像取 $k = 10$。

停一停，試一試　有多少個 d 位數完全不含 2？（首位數字不可以是 0。）一個 d 位數最小可以是多少？估計每個區塊的貢獻的界，然後對 d 求和。

背後的數學

凝聚判別法

題目中的第一個不等式正是柯西凝聚判別法（Cauchy's condensation test）的核心：若 f 為正且遞減，則

$$\sum_{r=1}^{\infty} f(r) \text{ 收斂} \iff \sum_{n=0}^{\infty} 2^n f(2^n) \text{ 收斂。}$$

它把困難的級數變成容易的級數。應用於 $f(r) = 1/r^p$，便得到 $\sum 2^n \cdot 2^{-np} = \sum (2^{1-p})^n$，這是一個等比級數，恰好在 $p > 1$ 時收斂。應用於 $1/(r \ln r)$，可知連這個級數也發散；應用於 $1/(r(\ln r)^2)$，則可知這個級數收斂。這個論證可追溯至奧雷姆

（Nicole Oresme），他在大約 1350 年正是用圖 2.3.1（見網上該節的完整版）中的分塊方法，證明了調和級數發散。

調和級數發散得有多慢

圖 2.3.1（見網上該節的完整版）顯示每一塊的貢獻大約是 $\ln 2$，所以首 N 項之和應該大約是 $\log_2 N \times \ln 2 = \ln N$。事實上

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + \gamma + (\text{某個趨向 } 0 \text{ 的量}),$$

其中 $\gamma = 0.5772\ldots$ 是歐拉－馬斯刻若尼常數（Euler–Mascheroni constant）。至今沒有人知道 γ 是否有理數（rational）。你會在大學一年級的分析課中用積分證明這條公式，而調和數（harmonic numbers）會在 Section 9.11 和 Section 11.12 再次出現。

大多數的數都含有 2

Kempner 級數為甚麼收斂？因為在大數之中，「不含 2 的數」非常罕有：在小於 10^d 的數之中，不含 2 的所佔比例至多是 $(0.9)^d$，而這個比例趨向 0。在 100 位數之中，只有不足 0.003% 能避開數字 2。所以我們刪去的並不是十分之一的項，而是幾乎所有的項。我們求得的界 80 相當寬鬆：1979 年，Robert Baillie 用一種加速方法把這個和計算到小數點後許多位，其值約為 19.257。

冪的倒數之和

第 (ii) 部分的和是 $\zeta(3)$，即我們在 Section 1.2 遇過的黎曼（Riemann）zeta 函數的一個值。在 Section 2.4 我們會求出 $\zeta(2) = \pi^2/6$ 的準確值，而歐拉（Euler）亦找到了 $\zeta(4), \zeta(6), \ldots$ 的公式。但至今沒有人找到 $\zeta(3)$ 的公式。1978 年，Roger Apéry 證明了 $\zeta(3)$ 是無理數（irrational），震驚了整個數學界；他所用的積分與 Section 2.9 中的頗為相似。至於 $\zeta(5)$ 是否無理數，至今仍然未知。

延伸練習

1. **感受一下有多慢。**利用 $\sum_{r \le N} 1/r \approx \ln N + 0.5772$，估計調和級數需要多少項才超過 10，以及需要多少項才超過 100。

2. **判別法的實際運用。**用第 (i) 部分的方法，取 $f(r) = 1/r^2$，證明 $\sum 1/r^2 \le 2$。然後把第一項分開處理，從而改進這個界。

3 **在收斂與發散之間。**利用 $k = 2$ 的分塊不等式，證明 $\sum_{r\geq 2} \frac{1}{r \ln r}$ 發散，而 $\sum_{r\geq 2} \frac{1}{r(\ln r)^2}$ 收斂。

4 **排除更多數字。**較難證明：十進制表示中既不含 2 亦不含 7 的所有正整數，其倒數（reciprocal）之和小於 35。（你看得出 35 是怎樣來的嗎？）

延伸閱讀

- **Julian Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant***（Princeton University Press）。講述調和級數、γ 以及更多相關課題，為程度較高的中學生而寫。
- **Mary Hart, *Guide to Analysis***（Palgrave）。一本簡明的大學一年級教科書，其中論級數與比較判別法的一章寫得十分清晰。
- **Robert Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit"**, *American Mathematical Monthly* 86 (1979)。一篇短論文（論缺少某個指定數字的整數的倒數之和），讀完本節後你便有能力讀懂。

完整的引導式解答見第 2.3 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/kempner.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com