2.2 作為極限的黃金比例

工作紙

題目

STEP II 2013，第 6 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/13-s2-q6

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　你認得這些分子和分母嗎？再看看小數值：$1, 2, 1.5, 1.667, 1.6, 1.625, 1.615, \ldots$。這個數列是遞增的嗎？還是遞減的？

階段 1 比較相隔兩項的項

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 利用 $(*)$ 把 $u_{n+2} - u_n$ 寫成 $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n-1}}$，然後通分（common denominator）。

停一停，試一試 對 $u_{n+1} - u_{n-1}$ 作同樣的處理，再把兩個結果合併。然後利用 $(*)$ 化簡分母中的乘積 $u_{n+1}u_n$ 和 $u_{n-1}u_{n-2}$。

階段 2　一個陷阱

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試　在使用第 (i) 部分之前，先用歸納法（induction）證明對所有 n 都有 $1 \le u_n \le 2$。若 $1 \le u_n \le 2$，$\frac{1}{u_n}$ 最大可以是多少？

階段 3 兩個單調子數列

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想 第 (i) 部分說明 $u_{n+2} - u_n$ 是 $u_n - u_{n-2}$ 的正數倍。那麼，對於 $u_3 - u_1$, $u_5 - u_3$, $u_7 - u_5$, ... 的正負號，你可以得出甚麼結論？

想一想 奇數項是遞增（increasing）還是遞減（decreasing）？偶數項呢？它們是否有界（bounded）？

停一停，試一試 題目給出的定理是關於遞增數列的。怎樣才能把它應用到一個遞減而有下界（bounded below）的數列上？

階段 4　求出極限

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　使用 $(*)$ 兩次，把 u_{n+2} 直接用 u_n 表示。

停一停，試一試　令 $n \to \infty$，先取奇數值，再取偶數值。兩個極限（limit）都滿足同一個二次方程（quadratic equation）：它是哪一個根？為甚麼由此可知整個數列收斂（converge）？

階段 5 從另一個起點出發

涵蓋：最後一部分，由 $u_1 = 3$ 開始

想一想 取 $u_1 = 3$，寫出數列的首幾項。你之前的論證中，哪些仍然成立？又是從哪一項開始成立？

背後的數學

蛛網圖與不動點

每個由 $u_{n+1} = f(u_n)$ 定義的數列，都可以畫成一幅蛛網圖（*cobweb diagram*）（圖 2.2.1）。畫出 $y = f(x)$ 和 $y = x$。由 x 軸上的 u_1 出發，垂直走到曲線（高度為 $u_2 = f(u_1)$），再水平走到直線 $y = x$（這樣便移到 $x = u_2$），然後再垂直走到曲線，如此類推。這裏 $f(x) = 1 + 1/x$ 是遞減的，所以路徑會向內盤旋，交替地過高和過低，趨向曲線與直線相交的那一點：不動點（*fixed point*）φ，該處 $f(\varphi) = \varphi$。

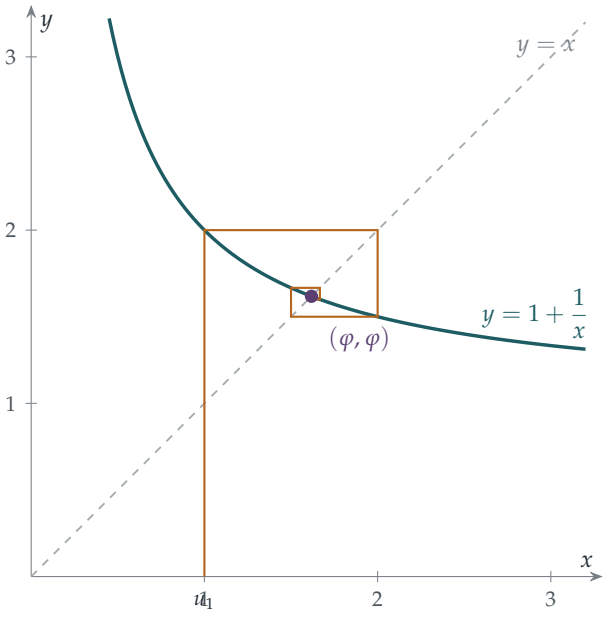

圖 2.2.1　$u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ 由 $u_1 = 1$ 出發的蛛網圖。路徑向上走到曲線，再橫向走到直線 $y = x$，如此不斷重複。由於曲線向下傾斜，路徑會向內盤旋，趨向不動點 $\varphi \approx 1.618$，並且交替落在兩側：這就是奇數項與偶數項的鋸齒狀擺動。

有多快，為甚麼

第 (i) 部分中的因子 $(1+u_n)(1+u_{n-2})$ 從何而來？在不動點附近，$u_{n+1} - \varphi = f(u_n) - f(\varphi) \approx f'(\varphi)(u_n - \varphi)$，而 $f'(\varphi) = -1/\varphi^2 \approx -0.38$。所以每走一步，誤差大約乘以 -0.38：正負號反轉（鋸齒狀擺動），大小縮減（收斂）。走兩步則乘以 $1/\varphi^4 \approx 0.146$，這正是 $1/\big((1+u_n)(1+u_{n-2})\big)$ 所趨向的值。到了大學，這會發展成*壓縮映射定理*（*contraction mapping theorem*）：若在不動點附近有 $|f'| \le k < 1$，則迭代會收斂至該不動點，而誤差至少以幾何級數的速度縮小。它是數學中最有用的定理之一，也是用來證明微分方程有解的方法（第 8 章）。在 Section 2.8 中，我們會遇到一個不動點並不吸引的映射，結果截然不同。

最無理的數

各項 $u_n = F_{n+1}/F_n$ 是同等大小的分數之中對 φ 最好的逼近，但所謂「最好」其實並不太好：φ 比任何其他數都更難用分數逼近。原因可從它的連分數（continued fraction）$[1;1,1,1,\ldots]$ 看出：連分數中出現大的項，就表示有非常好的逼近（試想 $\pi = [3;7,15,1,292,\ldots]$ 和極佳的 $\frac{355}{113}$），而 φ 的每一項自始至終都是最小的。赫維茲（Adolf Hurwitz）於 1891 年證明，對每個無理數（irrational）x，都有無窮多個分數滿足

$|x - p/q| < 1/(\sqrt{5}\,q^2)$，而且 $\sqrt{5}$ 不能再改進，原因正正在於 φ。這種「最大無理性」，就是黃金角出現在向日葵種子螺旋圖案中的原因。

延伸練習

1 **藏在其中的斐波那契數。**證明 $u_n = F_{n+1}/F_n$，其中 $F_1 = F_2 = 1$ 及 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$。

2 **誤差縮小。**證明 $u_{n+1} - \varphi = -\dfrac{u_n - \varphi}{\varphi\, u_n}$，並由此推出對所有 n 均有 $|u_n - \varphi| \le \varphi^{-(n-1)}$。（利用 $\varphi^2 = \varphi + 1$ 及 $u_n \ge 1$。）

3 **令數列中斷。**證明若 $u_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$，則數列是常數數列。求出所有使得某個 $u_n = 0$、以致數列無法繼續下去的初始值 u_1。（提示：由 $u_n = 0$ 倒推回去。）

4 **$\sqrt{2}$ 的近親。**設 $v_1 = 1$ 及 $v_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + v_n}$。仿照本題的方法，證明 $v_n \to \sqrt{2}$，並把 $\sqrt{2}$ 寫成連分數。

延伸閱讀

- **Mario Livio, *The Golden Ratio***（Broadway）。講述 φ 的歷史，把真正的數學與眾多迷思區分開來。
- **C. D. Olds, *Continued Fractions***（Mathematical Association of America）。一本簡短而非常易讀的入門書，對象是能力較強的中學生。
- **J. C. Burkill, *A First Course in Mathematical Analysis***（Cambridge University Press）。嚴謹地處理單調數列與完備性，並附有大量習題。

完整的引導式解答見第 2.2 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/golden-limit.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com