2.1 「最終」是甚麼意思

工作紙

題目

STEP III 2015，第 2 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/15-s3-q2

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　定義中有「存在正整數 m」這句話。要證明 $(s_n) \le (t_n)$，你究竟要拿出甚麼來？要證明它是假的，你又要說明甚麼？

階段 1　線性函數（linear function）對二次函數（quadratic）

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　最初的幾項並不重要。對哪些 n 有 $1000n \le n^2$？把兩邊同時除以 n，它是正數。

階段 2 「最終較小」（eventually smaller）跟平常的「較小」一樣嗎？

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 把「$(s_n) \leq (t_n)$ 不成立」完整地寫出來，但前面不可以用「不」字。$s_n > t_n$ 必須發生多少次？

停一停，試一試 找兩個由正數組成的數列（sequence），讓它們永遠不斷互換位置，使得任何一個都不會最終小於另一個。

階段 3　串連

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　每個假設都有它自己的 m，而且兩者可能不同。把它們稱為 m_1 和 m_2。

停一停，試一試　哪一個 m 的值能使兩個不等式（inequality）對所有 $n \geq m$ 都成立？

階段 4 二次函數對指數函數（exponential）

涵蓋：第 (iv) 部分

想一想 列一個表，寫出 n^2 和 2^n 在 $n = 1, \ldots, 8$ 時的值。$n^2 \leq 2^n$ 看來從哪裏開始成立？

停一停，試一試 用歸納法（induction）證明。要從 $n^2 \leq 2^n$ 推到 $(n+1)^2 \leq 2 \cdot 2^n$，只需知道 $(n+1)^2 \leq 2n^2$ 便足夠。這對哪些 n 成立？

背後的數學

分析的語言

在牛頓（Newton）和萊布尼茲（Leibniz）之後約 150 年間，數學家運用極限（limit）和無窮小（infinitesimal）出神入化，卻說不清楚它們確切是甚麼意思。貝克萊主教（Bishop Berkeley）在 1734 年嘲諷無窮小是「已逝之量的鬼魂」，他說的不無道理。補救要等到十九世紀：柯西（Augustin-Louis Cauchy）以及其後的魏爾斯特拉斯（Karl Weierstrass），以由「對每個」和「存在」構成的命題，取代了「變得無限接近」這類含糊的說法。現

代的定義

$$a_n \to L \iff \text{對每個} \varepsilon > 0\text{，都存在} N\text{，使得} |a_n - L| < \varepsilon \text{ 適用於所有} n \geq N$$

跟本題的定義模樣完全相同，只是前面多了一個量詞。這是你在大學分析課程裏最先遇到的東西。

增長的階

第 (iv) 部分是一道著名階梯（增長的階，orders of growth）的其中一小級。對任何固定的 $k > 0$ 和 $c > 1$，

$$(\ln n) \leq (n^k), \qquad (n^k) \leq (c^n), \qquad (c^n) \leq (n!), \qquad (n!) \leq (n^n),$$

而事實上，每個數列不單最終小於下一個，更是最終小於下一個的*任何常數倍*。哈代（G. H. Hardy）為這類比較寫了一整本書：*Orders of Infinity*（1910）。今天它已是計算機科學的日常語言，「這個算法需要 $O(n^2)$ 步」的意思，就是步數最終不超過 n^2 的某個常數倍。n^2 與 2^n 之別，就是一個會完成的程式，與一個到太陽燃盡也完成不了的程式之別。

並非全序的序

第 (ii) 部分說明「最終小於」不是*全序*（total order）：有些數列對根本無法比較。這類具有傳遞性但不能比較所有東西的關係，稱為*預序*（preorder）或*偏序*（partial order），而且隨處可見：整數的整除性、集合的包含關係，以及「是……的子羣（subgroup）」都是例子。辨別一個關係具有哪些性質、不具有哪些性質，是數學家訓練的一部分。

延伸練習

1. **樣本試卷熱身題。**試做 STEP III Specimen paper，第 2 題（step.maths.org/questions/spec-s3-q2），此題出自 1987 年首屆 STEP 舉行之前發出的試卷。（最後一部分的提示：利用二項展開式（binomial expansion）的下一項。）

2. **兩邊都成立。**證明若 $(s_n) \leq (t_n)$ 且 $(t_n) \leq (s_n)$，則對所有足夠大的 n 都有 $s_n = t_n$。

3. **競逐無窮。**試找出兩個遞增的正數數列，兩者皆趨向無窮大，而任何一個都不是最終小於另一個。

4. **拾級而上。**證明 $(2^n) \leq (n!)$，並給出一個明確的 m。然後證明 $(n^{10}) \leq (2^n)$，並求出可行的最小 m。（第二部分用試算表會有幫助；答案大得出人意表。）

延伸閱讀

- **Lara Alcock, *How to Study for a Mathematics Degree***(牛津大學出版社 Oxford University Press)。第 3 章講的正是這種邏輯語言，以及大學新生為何覺得它困難。
- **Lara Alcock, *How to Think About Analysis*** (牛津大學出版社 Oxford University Press)。一本親切易讀的指南，講解大學一年級分析的各個定義。
- **Daniel Velleman, *How to Prove It*** (劍橋大學出版社 Cambridge University Press)。有系統地介紹邏輯、量詞與證明。

完整的引導式解答見第 2.1 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch02/eventually.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com