13.4 平均數還是中位數？

工作紙

題目

STEP II 2000，第 14 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/00-s2-q14

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　為甚麼中位數的密度（density）與 $y^n(1-y)^n$ 成正比？（要 Y 接近 y，$2n+1$ 個值之中須有多少個在其下，又有多少個大於 y？）

階段 1　常數

涵蓋：常數 k

> **想一想**　概率密度函數（density）的積分等於 1。利用題目給出的積分，把兩個冪次都取為 n。

階段 2 平均值與方差

涵蓋：平均值（mean）與方差（variance）

想一想 這個密度函數是否關於 $\frac{1}{2}$ 對稱（symmetric）？由此可得 $\mathrm{E}(Y)$。

停一停，試一試 要求 $\mathrm{E}(Y^2)$，可再次利用題目給出的積分，這次冪次取 $n+2$ 和 n，然後化簡當中的階乘（factorial）。

階段 3　與平均值比較

涵蓋：比較中位數（median）與平均值

想一想　$\bar{X}$ 的平均值和方差分別是甚麼？比較 n 很大時這兩個方差的大小。

停一停，試一試　把 Y 和 $\bar{X}$ 都視為平均值為 $\frac{1}{2}$ 的正態分佈（normal distribution）。用 Φ 寫出各個概率。哪一個較大？為甚麼？

背後的數學

效率

兩個無偏估計量（unbiased estimator）的*相對效率*（relative efficiency）是它們方差之比；它說明其中一個需要多少倍的觀測值，才能與另一個看齊。對於均勻分佈的數據，中位數相對於平均值的效率是 $\frac{1}{3}$。對於正態分佈的數據，這個數字是 $\frac{2}{\pi} \approx 0.64$：中位數大約需要多 57% 的觀測值。但遇上厚尾（heavy-tailed）數據，形勢就逆轉了。對於柯西（Cauchy）分佈（Section 12.22），平均值毫無用處，因為 n 個觀測值的平均並不比單獨一個觀測值好，而中位數卻表現良好。對於拉普拉斯（Laplace）分佈（Section 12.24），中位數的效率是平均值的兩倍。

穩健統計學

中位數是*穩健*（robust）的：即使把接近一半的數據改成任意數值，它也不會移動太遠。平均值卻沒有這種保障：一個錯誤的數值就足以把它毀掉。在 1960 及 1970 年代，John Tukey、Peter Huber 等人發展出*穩健統計學*（robust statistics），即一些估計量，對乾淨的數據而言效率幾乎與平均值一樣高，卻又能抵禦離羣值（outlier），例如*截尾平均值*（trimmed mean）（捨去最大和最小的 10%，再取餘下數據的平均），跳水、體操等運動項目的評分就採用這種方法。

拉普拉斯與中位數

拉普拉斯在 1774 年證明，假如誤差服從雙指數（拉普拉斯）分佈，則真實值的最佳估計是中位數；高斯（Gauss）在 1809 年證明，假如誤差服從正態分佈，則最佳估計是平均值，他並由此得出最小二乘法（method of least squares）。誰是誰非，取決於誤差的表現如何；每遇上一種新的數據，統計學家至今仍會為這個問題爭論一番。

延伸練習

1 **中位數的密度。**用數算的方法推導密度 $\frac{(2n+1)!}{(n!)^2}y^n(1-y)^n$：一個值落在 $[y, y+\delta y]$ 內，n 個在其下，n 個在其上。

2 **三個觀測值。**當 $n=1$（三個均勻觀測值）時，求 $\mathrm{Var}(Y)$ 和 $\mathrm{Var}(\bar{X})$ 的準確值。哪一個較小？

3 **中列數。**中心的另一個估計量是中列數（midrange）$\frac{1}{2}(\max+\min)$。證明對於均勻分佈的數據，若有 $m=2n+1$ 個觀測值，它的方差是 $\frac{1}{2(m+1)(m+2)}$。它與平均值相比如何？（試與 Section 13.3 比較。）

4 **一個離羣值。**十一個量度結果為 9.8、9.9、10.0、10.0、10.1、10.1、10.2、10.2、10.3、10.4 和 104（打字錯誤）。比較平均值和中位數。

延伸閱讀

- **John Rice, *Mathematical Statistics and Data Analysis***（Duxbury），論及順序統計量（order statistics）和效率。
- **Rand Wilcox, *Fundamentals of Modern Statistical Methods***（Springer）。為非專家講解穩健方法為何重要。
- **Stephen Stigler, *The Seven Pillars of Statistical Wisdom***（Harvard University Press）。

從歷史角度看數據的匯總、平均值和中位數。

完整的引導式解答見第 13.4 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch13/mean-or-median.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com