12.8 Penney 遊戲

工作紙

題目

STEP III 2001，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/01-s3-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　假設至今的投擲結果以 TT 結尾，而且仍未有人勝出。THH 有沒有可能比 TTH 先出現？

階段 1　狀態

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　一旦出現了 TT，THH 還有可能比 TTH 先出現嗎？然後設 p_{XY} 為最後兩次擲幣結果是 XY 時 A 獲勝的概率（probability）。為四個狀態（state）各寫出一條方程。

階段 2 求解

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 解這四條方程。每一種開首的兩次結果，概率都是 $\frac{1}{4}$。

階段 3 B 對 C

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試 C 想要 HHT，而 B 想要 THH。如果遊戲以 HH 開始，誰會獲勝？如果不是，看看第一個 HH 的前一次擲出甚麼。

階段 4 循環

涵蓋：第 (iii) 部分

> **想一想** 對於 C 對 D，仿照第 (i) 部分設立狀態。對於 D 對 A，把第 (ii) 部分中的正面（heads）與反面（tails）互換。

背後的數學

為甚麼有些序列較好

在任何一個位置，所有三次投擲的序列出現的機會都相同，而每個序列的期望等待時間（expected waiting time）也不難計算。但各序列的等待時間並不相同：TTH 平均要等 8 次投擲，TTT 卻要等 14 次，因為與自身重疊的序列（例如 TTT，只差一步的 TTH 會令已累積的兩次投擲前功盡廢）出現得較慢。而在兩個序列的競賽中，關鍵在於每個序列與對方如何重疊。THH 勝 HHT，是因為 HHT 每次出現（除了在最開頭之外），前面都有一個 T，這表示 THH 剛剛已經出現。後選一方的竅門總是一樣：取對手序列的頭兩個符號，再在前面加上與對手中間符號相反的那個符號。

康威公式（Conway's formula）

約翰·康威發現了一條計算勝算的絕妙公式。對於長度為 n 的兩個序列 X 和 Y，定義相關數（correlation）XY 為一個 n 位的二進制數：由左至右，若 X 中由第 i 個符號開始的部分與 Y 開頭相同長度的部分相同，則第 i 位為 1。那麼 Y 比 X 先出現的勝算是

$$(XX - XY) : (YY - YX).$$

取 $X = \text{HHT}$ 及 $Y = \text{THH}$：$XX = 100_2 = 4$（只有整個 HHT 與自身吻合）；$XY = 001_2 = 1$（只有 HHT 末尾的 T 與 THH 的開頭吻合）；$YY = 100_2 = 4$；而 $YX = 011_2 = 3$（THH 末尾的 HH 和 H 都與 HHT 的開頭吻合）。所以 THH 先出現的勝算是 $(4-1) : (4-3) = 3 : 1$，即第 3 階段的 $\frac{3}{4}$。康威公式適用於任何長度、任何字母表的序列，其證明用到鞅（martingale）的理論：想像有一間賭場，賭客就序列的出現下注，再

利用公平遊戲的期望利潤為零這一事實。

Penney 與加德納（Gardner）

Walter Penney 於 1969 年在 *Journal of Recreational Mathematics* 的一篇短文中介紹了這個遊戲。馬丁·加德納於 1974 年在他的 *Scientific American* 專欄中介紹了它，使它廣為人知，文中還包括康威公式，這條公式是康威發現的，但他一直沒有發表。這類非傳遞關係（埃弗龍骰子（Efron's dice）是另一個例子：骰子 A 勝 B，B 勝 C，C 勝 D，而 D 勝 A）一再令人驚訝，在投票理論中也很重要，因為多數人的偏好可以形成循環：這就是孔多塞悖論（Condorcet's paradox）。

延伸練習

1. **四人同場。**試做 STEP II 2015，第 12 題（step.maths.org/questions/15-s2-q12）：四名玩家同時參與的 Penney 遊戲。
2. **等待時間。**證明直至 HH 首次出現的期望投擲次數是 6，而直至 HT 首次出現的則是 4。（使用首步分析。）
3. **最佳對策。**對於八個長度為三的序列，逐一找出以最大概率勝過它的序列。哪個序列最容易被擊敗？
4. **康威公式。**用康威公式驗證 HHT 勝 HTT 的概率是 $\frac{2}{3}$。

延伸閱讀

- **Martin Gardner, *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments***（W. H. Freeman）。書中包括 Penney 遊戲和康威公式。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 8.4 節。以生成函數（generating function）處理 Penney 遊戲。
- **David Williams, *Probability with Martingales***（Cambridge University Press）。以鞅給出的證明，留待日後再讀。

完整的引導式解答見第 12.8 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/penney.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com