12.7 淘汰賽中誰會遇上誰

工作紙

題目

STEP II Specimen paper，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/spec-s2-q16

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> **想一想**　有 2^n 名選手的淘汰賽（knockout tournament）共要進行多少場比賽？（每場比賽淘汰一名選手。）

階段 1　第一輪

涵蓋：第 (i) 部分

> **想一想**　在第一輪中，第一位選手的對手等可能地是其餘任何一位選手。其餘選手共有多少位？

階段 2 關鍵的對稱性

涵蓋：第 (ii) 部分

想一想 每次抽籤都是隨機的，而每場比賽都相當於擲一次公平硬幣。這個過程對待任何一對選手，會否與對待另一對選手有所不同？那麼，就任何一場指定的比賽而言，對賽雙方恰好是你那兩位選手的概率（probability）是多少？

階段 3 決賽

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試 決賽只是一場比賽，所以可以運用第二階段的結果。第 r 輪共有 2^{n-r} 場比賽，而兩位選手在同一輪中最多只能相遇一次：那麼他們在第 r 輪相遇的概率是多少？

階段 4 在任何階段

涵蓋：第 (iii) 部分

? **想一想** 他們最多只能相遇一次，所以各個「在第 r 輪相遇」的事件是互斥（mutually exclusive）的。把這些概率加起來，或者一次過點算全部 $2^n - 1$ 場比賽。

背後的數學

期望次數

第 4 階段的論證其實是一個期望值（expectation）的計算：X 和 Y 相遇的次數是若干個指示變量（indicator）之和，每場比賽對應一個；而它的期望值（由於它只取 0 或 1，所以等於相遇的概率）就是各個指示變量的期望值之和。這就是期望值的線性性質（linearity of expectation），在 Section 9.11 和 Section 12.4 中都曾用到。它最大的好處是完全不必理會各輪之間錯綜複雜的相依關係。

設有種子的賽事

現實中的賽事設有種子（seeded）：最強的選手會被編排在適當的位置，使他們要到後段輪次才可能相遇。而且現實中的比賽也不是 50–50 的。這兩點都破壞了對稱性，於是計算兩名指定選手相遇的機會便成了一項貨真價實的運算。為體育運動建立模型的統計學家正是運用這類計算來預測賽事，當中每場比賽的概率都是根據選手的評分估計出來的。對稱的情況則是一條基線，用來衡量各種現實因素的影響。

延伸練習

1 **逐輪計算。**直接證明 X 和 Y 在第 k 輪相遇的概率是 $\frac{2^{n-k}}{\binom{2^n}{2}}$，並驗證這些概率加起來等於 $\frac{1}{2^{n-1}}$。

2 **固定的賽程表。**假如賽程表改為預先固定（如圖所示），但所有選手都被隨機編入其中，答案會否改變？

3 **一名強手。**假設選手 X 每場比賽都勝出。現在 X 與 Y 相遇的概率是多少？

4 **聯賽。**在一個有 $2n$ 支球隊的聯賽中，每兩隊都對賽一次，共有多少場比賽？相應的「相遇概率」是甚麼？

延伸閱讀

- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover），書中收錄了有關淘汰賽的問題。
- **David Spiegelhalter, *The Art of Statistics***（Pelican），講述建立模型與預測。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；可於網上免費閱讀），講述指示變量與對稱性。

完整的引導式解答見第 12.7 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/knockout.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com