12.6 多一枚硬幣

工作紙

題目

STEP I 2016，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s1-q12

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

> ? **想一想**　Alice 擲兩次：她擲得正面的次數的分佈（distribution）是甚麼？擲三次的 Bob 又如何？

階段 1　硬算

涵蓋：第 (i) 及 (ii) 部分

> ? **想一想**　寫出 Alice 和 Bob 各自擲得正面數目的分佈（distribution）。按 Alice 擲得的正面數目分類，再把各情況相加。

階段 2 **拆開 Bob 的擲幣**

涵蓋：第 (iii) 部分

> **停一停，試一試** 把 Bob 的 $n+1$ 次擲幣看成先擲 n 次，再額外多擲一次。兩人各擲 n 次之後，Bob 或是領先，或是打平，或是落後。在每種情況下，額外的那一擲會帶來甚麼影響？利用 Alice 與 Bob 之間的對稱性（symmetry）。

背後的數學

對稱與補事件

那個漂亮的證明結合了兩個事實：在一個對稱之下互換的兩個事件概率相等，而兩個互補事件的概率之和為 1。若兩者同時成立，則每個事件的概率都是 $\frac{1}{2}$。同樣的推理在概率論中隨處可見。在航班座位問題（Section 12.5）中，S_1 與 S_n 在一個對稱之下互換，而最後剩下的恰好是其中一個。在六貫棋（Hex）中，由棋盤的對稱性，加上恰有一方必勝這個事實，可知先手一方佔優，不過在大棋盤上無人知道必勝策略是甚麼。

平手的可能性有多大？

當二人投擲次數相同時，平手的概率 p_1 就很重要。Alice 與 Bob 平手，即 Alice 的正面數目等於 Bob 的正面數目；利用對稱性，把 Bob 的正面換成他的反面，這個概率就等於 Alice 的正面數目加上 Bob 的正面數目等於 n 的概率，亦即在 $2n$ 次投擲中共有 n 個正面。所以

$$p_1 = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

這裏用了斯特靈近似（Stirling's approximation）（Section 12.23）。平手會變得罕見，但變得很慢：各擲 100 次，平手的機會仍然約有 5.6%。

延伸練習

1. **多擲兩枚硬幣。**若 Bob 擲 $n+2$ 枚硬幣而 Alice 擲 n 枚，證明 $\mathrm{P}(\text{Bob 的正面較多}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{P}(H' = H_A)$，其中 H' 是 Bob 頭 $n+1$ 次投擲中的正面數目。

2. **不公平的硬幣。**若二人所用的硬幣擲出正面的概率都是 p，多擲一次時答案是否仍然是 $\frac{1}{2}$？那個漂亮的證明中哪一步不再成立？

3. **平手。**用正文中的技巧證明 $p_1 = \binom{2n}{n}/4^n$，並求它在 $n = 1, 2, 3$ 時的值。

4. **骰子。**Alice 擲 n 粒骰子，Bob 擲 $n+1$ 粒。Bob 擲得較多六點的概率是否等於 $\frac{1}{2}$？

延伸閱讀

- **Peter Winkler, *Mathematical Mind-Benders***（A K Peters）。收錄大量可用對稱性解決的概率謎題。
- **Gabor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics***（Reidel）。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。

完整的引導式解答見第 12.6 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/one-more-coin.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com