12.5 最後一位乘客的座位

工作紙

題目

STEP II 2021，第 11 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2021 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP II 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

停一停，試一試 列出所有可能發生的情況，求出 P_2 和 P_3。

階段 1 遞歸關係（recurrence）

涵蓋：第 (ii) 部分

停一停，試一試 假設 T_1 坐了 S_k，其中 $2 \le k \le n-1$。那麼 $T_2, \ldots, T_{k-1}$ 會怎樣做？當 T_k 到達時，哪些座位是空的？為甚麼這與座位較少的原問題相同？

想一想 現在以 T_1 所選的座位為條件（condition on）來考慮，每個座位被選中的概率（probability）均為 $\frac{1}{n}$。

階段 2　答案

涵蓋：第 (iii) 部分

想一想　你已經知道 P_2 和 P_3。猜出 P_n，然後利用你的遞歸關係，以強歸納法（strong induction）證明。

階段 3 倒數第二位乘客

涵蓋：第 (iv) 部分

> **停一停，試一試** 最後一位乘客可能剩下哪些座位？至於 T_{n-1}：只有當這位乘客的座位比 S_1 更早被選中時，這位乘客才會失去自己的座位。在被佔去座位的乘客可以選擇的座位之中，S_1、S_{n-1} 和 S_n 的地位是否相同？記得考慮 $n = 2$ 這個特殊情況。

背後的數學

對稱論證

第二個證明體現了概率論中一個威力強大的想法：若兩個結果可由隨機過程的某種對稱性互相對應，它們的概率就相同。這裏的過程在 S_1 和 S_n 其中一個被選中之前，並不區分這兩個座位，所以兩者成為最後剩下的座位的可能性必定相等。對稱論證往往只憑一個觀察，就能取代冗長的計算。接下來的幾節有很多這樣的例子：Section 12.6 中多擲一次硬幣，Section 12.7 中的淘汰賽抽籤。

有多少位乘客被迫換位？

被迫換位的乘客（即坐不到自己座位的乘客）的數目同樣有很好的規律。T_1 除非選中 S_1，否則就算是換了位；而 T_k（其中 $k \geq 2$）被迫換位的概率是 $\frac{1}{n-k+2}$。把這些概率相加，被迫換位的乘客數目的期望值（expected number）是

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right) = H_n - \frac{1}{n},$$

大約是 $\ln n$：即使飛機上有 300 個座位，這場混亂平均也只影響約六位乘客。調和數（harmonic numbers）又再出現了（Section 9.11）。

延伸練習

1 **兩位健忘的乘客。**如果最先的兩位乘客都隨機選位，最後一位乘客坐到自己座位的概率是多少？

2 **被迫換位的乘客。**列出所有可能情況，驗證 $n = 3$ 時被迫換位的乘客數目的期望值。

3 **迂迴的路線。**利用遞推關係，證明 $\sum_{r=2}^{n-1} P_r = \frac{n-2}{2}$ 與對稱論證互相吻合。

4 **最後一個座位。**證明在最後一位乘客坐不到自己座位的條件下，最後一位乘客坐到 S_1 的概率是 1。為甚麼？

延伸閱讀

- **Peter Winkler, *Mathematical Puzzles: A Connoisseur's Collection***（A K Peters）。收錄了飛機座位謎題，以及許多其他可用對稱性解決的謎題。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。一本經典的題集。
- **Joseph Blitzstein & Jessica Hwang, *Introduction to Probability***（CRC Press；可於網上免費閱覽）。

完整的引導式解答見第 12.5 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/airline-seat.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com