12.3 「隨機」是甚麼意思？

工作紙

題目

STEP III 2022，第 12 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 OCR 提供下載的 2022 年 STEP 試卷（zip 檔案）內的 STEP III 試卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　若角 AOB 為 θ，弦 AB 的長度是多少？（由 O 作垂線。）

階段 1　圓上的兩點

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　若角 AOB 為 θ，從 O 作垂線（perpendicular）以求 AB。角 θ 在 $[0, 2\pi]$ 上均勻分佈（uniform）：進行積分。

階段 2 圓內的隨機一點

涵蓋：第 (ii) 部分，R 的密度

? **想一想** $\mathrm{P}(R \leq r)$ 是兩個面積之比。求導即可得出密度（density）。

? **想一想** 一條通過 C 的弦（chord）與 OC 所成的角為 t。這條弦與 O 相距多遠？那麼它有多長？

階段 3　對 C 取平均

涵蓋：第 (ii) 部分，求 $\mathrm{L}(t)$

停一停，試一試　把弦長對 R 的密度積分，期間 $s = \sin t$ 保持不變。然後把 $1-\cos^3 t$ 和 $1-\cos^2 t$ 因式分解（factorise），並利用 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$。

階段 4 **方向也是隨機的**

涵蓋：第 (iii) 部分

? **想一想** T 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均勻分佈。對 $\mathrm{L}(t)$ 的第二種形式積分。$\tan \frac{t}{2}$ 的導數（derivative）是甚麼？

背後的數學

貝特朗的三個答案

貝特朗原本的問題是：一條隨機弦比內接等邊三角形的邊長 $\sqrt{3}a$ 更長的概率是多少？他給出了三種方法和三個答案。

- 隨機端點：固定一個端點；若另一個端點落在圓周中間的三分之一之內，弦便是長的。概率為 $\frac{1}{3}$。
- 隨機取一條半徑，再在其上隨機取一點作為中點：若弦與 O 的距離小於 $\frac{a}{2}$，弦便是長的。概率為 $\frac{1}{2}$。
- 在圓盤內任意位置隨機取中點：若中點與 O 的距離在 $\frac{a}{2}$ 之內，弦便是長的。概率為 $\frac{1}{4}$。

每一種方法都是弦的集合上一個不同的概率分佈（probability distribution），當中並無矛盾：它們回答的是不同的問題。這裏的教訓是，「均勻隨機」只有相對於某個選定的參數化（parametrisation）才有意義，而對於連續的集合，通常並沒有唯一自然的參數化。

有沒有正確答案？

1973 年，物理學家 Edwin Jaynes 主張第二種方法才是「正確」的，理由是把圓稍為移動或縮放，答案都不應改變：一條隨機弦應該就像一根拋到地上所畫圓圈上的飲管。只有與圓心距離均勻分佈的那個分佈才具有這種不變性（invariance），而拋飲管的實驗也證實了 $\frac{1}{2}$。同一個想法，即正確的分佈就是尊重情境中各種對稱性的那一個，正是積分幾何

(integral geometry)的基礎；積分幾何是研究隨機直線的數學，它也解釋了 Section 12.20 中的布豐投針（Buffon's needle）。

從悖論到公理

貝特朗在 *Calcul des probabilités*（1889）中發表了他的弦悖論，部分原因是要嘲諷他眼中對「幾何概率」的草率運用。龐加萊（Henri Poincaré）也討論過它。1900 年，希爾伯特（David Hilbert）把概率的公理化（axiomatisation）列入他為新世紀提出的著名問題之中，而柯爾莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov）在 1933 年解決了這個問題：概率是結果空間上的一個測度（measure），任何關於「隨機」對象的問題，都必須先說明是哪一個空間、哪一個測度。貝特朗悖論正是說明為何必須如此的標準例子。

延伸練習

1. **貝特朗的概率。**驗證上文的三個概率 $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$。

2. **另一個平均值。**證明若弦的中點在圓盤內均勻選取（右邊的圖），期望長度是 $\frac{4a}{3}$。（提示：這就是 $L(\frac{\pi}{2})$。為甚麼？）

3. **隨機距離。**若弦與 O 的距離在 $[0, a]$ 上均勻分佈，證明期望長度是 $\frac{\pi a}{2}$。

4. **三種方法，三個分佈。**對三種方法中的每一種，求弦長 ℓ 在 $[0, 2a]$ 上的概率密度（probability density）。

延伸閱讀

- **Edwin Jaynes, "The well-posed problem"**, *Foundations of Physics* 3 (1973)。不變性論證，易讀而又發人深省。
- **Gábor Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*** (Reidel)。貝特朗悖論及其他許多悖論。
- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability*** (Cambridge University Press)。積分幾何，留待日後研讀。

完整的引導式解答見第 12.3 節：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/bertrand.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com