12.23 由概率得出斯特靈公式

工作紙

題目

STEP II 2016，第 13 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/16-s2-q13

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　設離散隨機變量（discrete random variable）X 的平均值為 μ、方差（variance）為 σ^2，並且近似於正態分佈，那麼 $\mathrm{P}(X = \mu)$ 大約是多少？（試想一個寬度為 1、以 μ 為中心的區間的概率。）

階段 1　十六枚硬幣

涵蓋：第 (i) 部分

想一想　求 $\mathrm{B}(16, \frac{1}{2})$ 的平均值（mean）和標準差（standard deviation）。以正態密度函數（normal density）在峯頂處的高度來近似 $\mathrm{P}(X = 8)$。

階段 2 中央二項式係數

涵蓋：第 (ii) 部分

> **停一停，試一試** 對於 $\mathrm{B}(2n, \frac{1}{2})$，寫出 $\mathrm{P}(X = n)$ 的精確表達式，再用同樣的方法寫出它的近似式。令兩者相等。

階段 3 **史特靈公式**

涵蓋：第 (iii) 部分

? **想一想** 對參數（parameter）為 n 的泊松分佈（Poisson distribution）照樣做一次。它的平均值和方差（variance）分別是甚麼？寫出 $\mathrm{P}(X = n)$ 的精確表達式和近似式。

背後的數學

這個近似有多準確？

這個論證只是啟發式（heuristic）的：它在單獨一點上使用正態近似，而一般的中心極限定理（central limit theorem）並不足以支持這樣做。它有一個嚴格的版本，稱為*局部中心極限定理*（*local central limit theorem*），所做的正是這件事，並使這個論證成為真正的證明。斯特靈公式其實出奇地準確：比值 $\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}$ 大約是 $1 + \frac{1}{12n}$，所以即使 $n = 1$，它給出的也是 0.92 而不是 1；而當 $n = 10$ 時，它只偏小了 0.8%。完整的級數（series）$1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \cdots$ 是*漸近級數*（*asymptotic series*）的一個例子：對於大的 n，它給出的近似值越來越好；但對於固定的 n，它最終會發散（diverge）。

階乘與正態分佈為何相連

斯特靈公式和正態密度中的 $\sqrt{2\pi}$ 是同一個常數，因為 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$。棣莫弗（Abraham de Moivre）在 1733 年正是循這條路找到二項分佈的正態近似的：他需要在 n 很大時近似 $\binom{n}{k}$；他找到了 $n! \approx Cn^{n+1/2}e^{-n}$ 這個形式，卻沒有找到那個常數。斯特靈（James Stirling）證明了 $C = \sqrt{2\pi}$。正態分佈是從階乘的漸近性質中誕生的。

棣莫弗與斯特靈

棣莫弗是一位逃亡到倫敦的法國新教徒，靠當私人教師和為賭徒出謀獻策維生。他在 1718 年出版了 *The Doctrine of Chances*（《機會論》），並在 1733 年的一本小冊子中找到二項分佈的正態近似，這是正態曲線首次面世。蘇格蘭數學家斯特靈在他的 *Methodus Differentialis*（1730）中發表了該常數的值，棣莫弗亦大方地把功勞歸於他。階乘的近似至今仍是活躍的課題：組合數學（combinatorics）和密碼學（cryptography）都需要對極大的 n 計算 $n!$。

延伸練習

1. **檢驗公式。**用斯特靈公式估計 10! 和 20!，並與真確值 3 628 800 和 2 432 902 008 176 640 000 比較。

2. **由 (iii) 到 (ii)。**證明第 (iii) 部分的斯特靈公式可推出第 (ii) 部分的近似式。

3. **100! 的位數。**利用 $\log_{10} n! \approx n\log_{10}\frac{n}{e} + \frac{1}{2}\log_{10}(2\pi n)$ 證明 100! 有 158 位數字。

4. **擲硬幣打成平手。**利用第 (ii) 部分，證明擲一枚公平硬幣 1000 次而恰好得到 500 次正面的概率約為 0.025。

延伸閱讀

- **William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1**（Wiley），第 II 章，當中證明了斯特靈公式。
- **Ronald Graham, Donald Knuth & Oren Patashnik, *Concrete Mathematics***（Addison-Wesley），第 9 章，講述漸近分析。
- **Stephen Stigler, *The History of Statistics***（Harvard University Press），講述棣莫弗與正態曲線的誕生。

完整的引導式解答見第 12.23 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/stirling-probability.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com