12.21 折斷一根棒

工作紙

題目

STEP III 1990，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/90-s3-q16

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　三個長度能組成三角形，當且僅當每一個都小於其餘兩個之和。如果三個長度之和為 L，這對最長的一個有何含意？邊 c 所對的角何時是鈍角？

階段 1 先切一刀，再對半分

涵蓋：第 (i) 部分

想一想 三段長度之和為 1，它們能組成三角形，當且僅當每一段都小於 $\frac{1}{2}$。這對 X 有甚麼要求？

停一停，試一試 這個三角形是等腰（isosceles）三角形。X 所對的角何時是鈍角（obtuse angle）？用餘弦定理（cosine rule）。在能組成三角形的條件下，X 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）。

階段 2 第二種構造

涵蓋：第 (ii) 部分：構造與條件

? **想一想** 在所給區域上，檢驗邊長為 x、y 和 $2-x-y$ 時的三條三角不等式（triangle inequalities）。

? **想一想** B 處的角所對的邊長為 y。把這個角是鈍角的條件寫成關於 y 的不等式。

階段 3 **面積**

涵蓋：第 (ii) 部分：概率

> **停一停，試一試** 把 $x^2 - 2x + 2$ 除以 $2 - x$。求出區域中位於曲線上方那部分的面積，再除以整個區域的面積。

背後的數學

經典的折棒問題

在兩個獨立而均勻分佈的點 U 和 V 處把木棒折斷。數對 (U, V) 在單位正方形上均勻分佈，而三段能組成三角形，正正是當每一段都短於 $\frac{1}{2}$：這個條件切去四個小三角形，總面積為 $\frac{3}{4}$，餘下的概率是 $\frac{1}{4}$。已知能組成三角形時，它是銳角三角形的概率是 $\frac{1}{4}$ 當中的 $3\ln 2 - 2 \approx 0.079$，即大約 32%。這三段木棒是*均勻隨機分割*（uniform random partition）的一個例子，它們的聯合分佈（joint distribution）是*狄利克雷分佈*（Dirichlet distribution），這種分佈出現在貝葉斯統計學（Bayesian statistics）中，也出現在描述資源如何隨機分配的模型中。

怎樣折斷木棒，大有關係

請留意，題目中的兩種方法，對聽起來相似的問題給出了不同的答案 $3 - 2\sqrt{2}$ 和 $3 - 4\ln 2$，而兩者又都與經典方法的答案不同。正如貝特朗（Bertrand）的弦（Section 12.3）一樣，在指明具體程序之前，「隨機」一詞毫無意義。

隨機三角形

關於隨機三角形的問題，是維多利亞時代流行的趣題。路易斯·卡羅（Lewis Carroll）的 *Pillow Problems*（1893 年）問及「隨機」選取的三角形是鈍角三角形的概率，而他的答案，正如本節的答案一樣，完全取決於他所選擇的隨機性模型。關於隨機三角形的問

題一直帶來驚喜：例如，在正方形內均勻隨機選取三點，它們組成鈍角三角形的概率約為 0.725，這個數值到二十世紀才有人準確算出。

延伸練習

1. **經典問題。**證明：若在兩個獨立而均勻分佈的點處把木棒折斷，則各段能組成三角形的概率是 $\frac{1}{4}$。
2. **折斷較長的一段。**在一個均勻分佈的點處把木棒折斷，然後在較長的一段上取一個均勻分佈的點，再把它折斷。證明三段能組成三角形的概率是 $2\ln 2 - 1 \approx 0.386$。
3. **銳角還是鈍角。**在第 (ii) 部分中，求三角形 ABC 在 C 處（對邊為 $AB = 2 - x - y$）有鈍角的概率。由此求它有任何一個角是鈍角的概率。
4. **最長一段的期望長度。**對於經典的折棒問題，證明最長一段的期望（expected）長度是 $\frac{11}{18}$。

延伸閱讀

- **Martin Gardner, *The Colossal Book of Mathematics***（Norton），書中收錄了折棒問題。
- **Frederick Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability***（Dover）。
- **Lewis Carroll, *Pillow Problems***（Dover，與 *A Tangled Tale* 合訂）。維多利亞時代的趣題，包括隨機三角形。

完整的引導式解答見第 12.21 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/broken-stick.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com