12.20 蒲豐投針

工作紙

題目

STEP I 1993，第 16 題

繼續閱讀之前，請先看題目（原題為英文）。題目載於 STEP Support Programme 的試題資料庫：

step.maths.org/questions/93-s1-q16

提示

請先自行嘗試解題。如果遇到困難，請逐一閱讀提示，每讀完一個便回到題目再試。標有停一停，試一試的提示是關鍵步驟。每個提示之後均留有空位供你演算。

想一想　針的中心與最近一條直線的距離為 x，而針與這些直線的垂直線所成的角為 y。針朝着該直線能伸展多遠？

階段 1　積分

涵蓋：積分

想一想　在 $\int_0^1 \cos^{-1} t \, \mathrm{d}t$ 中作代換（substitution）$t = \cos y$，然後使用分部積分法（integration by parts）。

階段 2 給定位置

涵蓋：已知 $X = x$ 時的概率

停一停，試一試 針的中心與最近的直線相距 x，而針與垂直線（perpendicular）所成的角為 y。針向着該直線的方向伸展多遠？對於固定的 x，哪些 y 值會使針與直線相交？

階段 3　對位置取平均

涵蓋：一般投擲的概率

> **想一想**　X 在 $[0, b]$ 上服從均勻分佈（uniform distribution）。把你求得的條件概率（conditional probability）對其密度（density）積分，再代入 $x = at$ 以利用第一個積分。

背後的數學

布豐的麵條

以下的方法幾乎不用計算就能看出答案。把針屈曲成任意形狀，成為一根「麵條」，並設 C 為它與直線相交的次數。根據期望值的線性（linearity of expectation），一條曲線相交次數的期望值，等於它各小段的期望值之和，所以與長度成正比：$\mathrm{E}(C) = \kappa L$，其中 κ 是某個常數。要求出 κ，可取麵條為一個直徑等於直線間距 $2b$ 的圓：它總是恰好相交兩次，而其長度為 $2\pi b$。所以 $\kappa \cdot 2\pi b = 2$，得出 $\kappa = \frac{1}{\pi b}$。對於長度為 $2a < 2b$ 的直針，它最多相交一次，故 $\mathrm{P}(\text{相交}) = \mathrm{E}(C) = \frac{2a}{\pi b}$。這個論證出自 Joseph-Émile Barbier（1860 年），是概率推理中的瑰寶：那個 π 來自用來校準常數的圓。

估算 π，以及錯誤示範

若拋出 n 根針，其中 c 根相交，則 $\frac{c}{n} \approx \frac{2a}{\pi b}$，而 $\pi \approx \frac{2an}{bc}$。誤差只會按 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的速度縮小，所以要把 π 算至小數點後三位，大約需要拋一百萬次。1901 年，意大利數學家 Mario Lazzarini 聲稱拋了 3408 次便得出 $\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$（準確至小數點後六位）。統計學家指出，這個結果好得令人難以置信：拋 3408 次，再配合一根精心挑選的針，恰好 1808 次相交便會得出 $\frac{355}{113}$，而只要在適當的時刻停止實驗，就能製造出這個結果。這是關於選擇性報告的經典警世故事。

布豐

布豐是一位博物學家，曾任巴黎皇家植物園園長，並著有一套 36 卷的自然史。他於 1733 年向法國科學院（Académie des Sciences）提出投針問題（以及一個使用方形地磚的版本，即「franc-carreau」遊戲），並於 1777 年發表解答。他的目的是要說明，概率中不單可以運用算術，也可以運用幾何。積分幾何（integral geometry）——研究隨機直線及其與曲線和曲面的交點的理論——正是由此發展而來，如今應用於體視學（stereology），即從二維切片估算三維結構（例如組織中的細胞）的大小和形狀的科學。

延伸練習

1 **長針。**若 $a > b$，針可能與多於一條直線相交。證明相交次數的期望值仍然是 $\frac{2a}{\pi b}$。

2 **麵條。**把一根長度為 $2a$ 的針屈成直角（兩臂各長 a）。相交次數的期望值是多少？

3 **方形地磚。**把一枚半徑為 r 的硬幣拋到鋪有邊長為 $s > 2r$ 的方形地磚的地板上。求硬幣完全落在一塊地磚之內的概率。

4 **Lazzarini 的針。**設 $a = \frac{5}{6}b$（使得 $\frac{2a}{\pi b} = \frac{5}{3\pi}$），證明拋 3408 次而有 1808 次相交，會給出估算值 $\pi \approx \frac{355}{113}$。

延伸閱讀

- **Daniel Klain & Gian-Carlo Rota, *Introduction to Geometric Probability***（Cambridge University Press），此書由布豐投針問題講起。
- **Lee Badger, "Lazzarini's lucky approximation of π"**，*Mathematics Magazine* 67 (1994)。一個可疑實驗背後的統計學。
- **Paul Nahin, *Digital Dice***（Princeton University Press）。以蒙地卡羅方法處理概率問題。

完整的引導式解答見第 12.20 節：

https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hant/ch12/buffon.html

每星期一道 STEP 題目，完整講解：The STEP Up，以電郵免費發送，訂閱網址：keithmcnulty.substack.com